



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

---

# Valoración de Opciones Asiáticas con Volatilidad Estocástica

Ingrid Constanza Monroy Zapata

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá, Colombia  
2013

# Valoración de Opciones Asiáticas con Volatilidad Estocástica

Ingrid Constanza Monroy Zapata

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Estadística**

Directora:  
Liliana Blanco Castañeda  
DOCTOR RERUM NATURALIUM IN MATHEMATIK

Línea de Investigación:  
Procesos estocásticos  
Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá, Colombia  
2013

A todos los que hicieron de este proyecto  
una realidad,  
mis más sinceros agradecimientos.

**Título en español**

Valoración de Opciones Asiáticas con Volatilidad Estocástica

**Title in English**

Pricing Asian Options Under Stochastic Volatility

**Resumen:** Las opciones asiáticas, son un tipo particular de opción exótica, cuya principal característica es que su precio depende del promedio de los precios del activo subyacente durante la vigencia de la opción. Estas opciones son ampliamente utilizadas en los mercados de divisas. Por otro lado, se tiene que la volatilidad observada en las divisas no es constante en el tiempo.

En este trabajo se describe la metodología de valoración de opciones neutral al riesgo y se aplican técnicas de Montecarlo para estimar el precio de opciones asiáticas con volatilidad estocástica, sobre la tasa de cambio peso/dólar (COP/USD), en los modelos de Heston y Hull & White. Finalmente, se realiza una comparación entre los precios estimados para este tipo de opciones frente a las opciones estándar y a opciones asiáticas con volatilidad constante.

**Abstract:** Asian options are exotic options whose value depends on the average price of the underlying asset during the life of the option. Asian options are widely used in exchange rate markets since price manipulation is inhibited. In addition, the exchange rate volatility observed from market data is not constant.

The main purpose of this thesis is to describe the risk-neutral option valuation methodology and to apply Monte Carlo techniques to estimate the asian options price from the COP/USD exchange rate within a stochastic volatility framework using the models proposed by Heston and Hull & White. Additionally, comparisons between the price of standar european options, asian options with constant volatility and asian options with stochastic volatility were also performed.

**Palabras clave:** Opciones Asiáticas, volatilidad estocástica, valoración de opciones, valoración neutral al riesgo, Modelo de Black-Scholes, tasa de cambio, TRM, modelo de Heston, modelo de Hull & White

**Keywords:** Asian options, stochastic volatility, pricing options, risk neutral pricing, Black-Scholes model, exchange rate, TRM, Heston model, Hull & White model

# Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Aprobada

---

Jurado

Jaime Londoño Londoño

---

Jurado

Viswanathan Arunachalam

---

Director

Liliana Blanco Castañeda

Bogotá D.C., 4 de octubre de 2013

---

# Índice general

---

Índice general	I
Introducción	IV
Notación	X
<b>1. Preliminares Matemáticos y Estadísticos</b>	<b>1</b>
1.1. Procesos Estocásticos . . . . .	1
1.2. Martingalas . . . . .	6
1.3. Movimiento Browniano . . . . .	7
1.3.1. Movimiento Browniano Geométrico . . . . .	14
1.4. Integral de Itô . . . . .	17
1.4.1. Consideraciones Generales . . . . .	18
1.4.2. Construcción de la integral estocástica para procesos simples .	19
1.4.3. Extensión de la Integral Estocástica a procesos en $L^2_{[0,T]}$ . . . . .	20
1.4.4. Lema de Itô . . . . .	22
1.4.5. Teorema de Representación de Martingalas . . . . .	23
1.5. Teorema de Girsanov . . . . .	24
<b>2. Modelo de Valoración de Opciones Estándar</b>	<b>28</b>
2.1. Generalidades . . . . .	28
2.2. Modelo de Black-Scholes . . . . .	31
2.2.1. Generalidades . . . . .	31
2.2.2. Medida Martingala . . . . .	34
2.2.3. Ausencia de Arbitraje . . . . .	36

2.2.4. Valoración de Opciones . . . . .	37
2.3. Valoración de opciones sobre tasas de cambio . . . . .	41
2.3.1. Medida Martingala . . . . .	43
2.3.2. Valoración . . . . .	44
2.4. Aplicación . . . . .	45
2.4.1. Descripción de los datos: Tasa de Cambio Peso/Dólar (COP/USD) . . . . .	45
2.4.2. Valoración de Opciones sobre la TRM . . . . .	50
<b>3. Valoración de Opciones Asiáticas</b>	<b>54</b>
3.1. Generalidades . . . . .	56
3.2. Opciones Asiáticas de tipo Geométrico . . . . .	57
3.2.1. Generalidades . . . . .	57
3.2.2. Propiedades de $S_T$ e $I_T$ . . . . .	58
3.2.3. Valoración . . . . .	61
3.2.4. Aplicación Tasas de Cambio . . . . .	67
3.3. Opciones Asiáticas de tipo Aritmético . . . . .	70
3.3.1. Método de Montecarlo con reducción de varianza . . . . .	72
3.3.2. Valoración . . . . .	74
3.3.3. Aplicación . . . . .	76
<b>4. Opciones Asiáticas con Volatilidad Estocástica</b>	<b>81</b>
4.1. Modelos de Volatilidad Estocástica . . . . .	83
4.1.1. Modelo de Hull & White . . . . .	84
4.1.1.1. Valoración de Opciones . . . . .	84
4.1.2. Modelo de Heston . . . . .	87
4.1.2.1. Valoración . . . . .	88
4.2. Aplicación . . . . .	90
4.2.1. Variables antitéticas . . . . .	90
4.2.2. Simulaciones . . . . .	91
4.2.2.1. Modelo de Hull & White . . . . .	91
4.2.2.2. Modelo de Heston . . . . .	94
4.3. Comparación de Resultados . . . . .	97
<b>Conclusiones</b>	<b>100</b>

---

Trabajo futuro	101
Códigos en Matlab	102
Bibliografía	111



---

# Introducción

---

Los derivados son un tipo especial de activos financieros ampliamente utilizados en los mercados modernos. Su nombre viene dado porque su valor depende o se *deriva* del valor que pueda tomar, en un momento dado del tiempo, otro activo financiero conocido como *subyacente*. Estos activos subyacentes pueden ser, entre otros, acciones de una compañía, materias primas (*commodities*) o tasas de cambio. Sin embargo, todos ellos tienen una característica en común, y es que su valor, conocido en el presente, puede cambiar en el futuro. Los principales tipos de derivados son los siguientes:

1. Forwards: son acuerdos (contratos) para vender o comprar un activo, donde las partes establecen de manera precisa el lugar, la fecha, el precio y las características de dicho activo. Son acuerdos realizados en el mercado OTC<sup>1</sup>, generalmente entre dos instituciones financieras o entre una entidad financiera y sus clientes.
2. Futuros: al igual que los forwards, los futuros son acuerdos entre dos partes para vender o comprar un activo en el futuro en una fecha y a un precio determinados. A diferencia de los forwards, este tipo de contratos se comercian en bolsas de valores. Por esta razón, las características de los activos, las fechas de vencimiento y los precios se encuentran estandarizados. Adicionalmente, como las transacciones se llevan a cabo entre dos o más partes que no se conocen, las bolsas de valores cuentan con cláusulas que garantizan el cumplimiento del contrato.
3. Swaps: son contratos utilizados para intercambiar entre dos partes una serie de flujos de caja en períodos específicos en el futuro.

---

<sup>1</sup>Los mercados OTC *Over the counter* son mercados de instrumentos financieros (acciones, bonos, derivados, etc.) cuyas negociaciones se realizan fuera del ámbito de las bolsas de valores formales entre dos contrapartes, las cuales, generalmente son entidades financieras o empresas. Por tanto, las transacciones realizadas no se encuentran estandarizadas, sino que son contratos ajustados a las necesidades de los involucrados.

4. Opciones: Son contratos que le otorgan el derecho a su poseedor de comprar o vender un determinado activo a un precio y en una fecha determinada en el futuro. Sobre este tipo de activos se centrará la atención en este trabajo.

A continuación se describen las opciones *estándar* o *Plain Vanilla*. Estas son las opciones más sencillas que existen en los mercados.

Una opción *de compra* (*Call*) estándar, le da a su poseedor el derecho (más no la obligación) de comprar en el futuro, al suscriptor, un activo preestablecido a un precio determinado. Si este derecho se restringe a un único momento del tiempo  $T$  establecido en el futuro, la opción se conoce como *europea*, si por el contrario, el derecho puede ser ejercido durante un rango de fechas  $t \in (0, T)$  establecidas en el momento de la suscripción del contrato la opción se llama *Americana*. El precio determinado para la compra se conoce como *precio de ejercicio* (*strike*), y el momento  $T$  establecido en el futuro se le conoce como *fecha de vencimiento*.

El opuesto a una opción *de compra* europea (americana) estándar es una opción *de venta* (*put*) europea (americana) estándar, la cual le da a su poseedor el derecho (más no la obligación) de vender al suscriptor un activo preestablecido a un precio determinado en un momento del tiempo  $T$  (un rango de fechas  $t \in (0, T)$ ) establecido en el futuro.

Siguiendo a Wystup [62], a Korn [38] y *The Options Institute* [34], se encuentra que las primeras transacciones de las que se tiene conocimiento y que operaban con mecanismos similares a las opciones actuales se remontan a la Grecia antigua, donde las cosechas de olivos eran vendidas antes de su madurez como mecanismo para asegurar de manera anticipada, el pago de un precio preestablecido por la cosecha. Así, los productores de olivos podían cubrirse frente al riesgo que las variaciones en el precio les proporcionaban.

El primer registro oficial se encuentra en el siglo XVII en el mercado holandés de tulipanes, donde los productores utilizaban el mismo principio de cobertura del mercado de olivos, comprando contratos (opciones) que les daban el derecho de vender la producción a un precio fijo, únicamente cuando el precio en el mercado descendiera. Esto beneficiaba a los poseedores de los contratos, pero era bastante riesgoso para los vendedores, quienes esperaban que el precio en el mercado aumentara y por tanto que los productores nunca ejercieran la opción. Desafortunadamente en 1637 los precios de los tulipanes en el mercado holandés cayeron abruptamente y los vendedores de las opciones no cumplieron con la

obligación de compra de la producción, lo cual generó una crisis económica en Holanda y una mala reputación de este tipo de contratos en Europa. No obstante, el mercado holandés continuó utilizando las opciones sobre productos agrícolas durante todo el siglo XVIII, aunque en una menor escala.

Una situación similar se observó en Inglaterra donde, desde principios del siglo XVIII, comenzaron a negociarse contratos de opciones sobre acciones de compañías. En 1720 se presentó una fuerte caída de los precios de las acciones de la *South Sea Company*, la cual fue atribuida principalmente a la especulación con opciones sobre acciones de esta compañía. Esta situación provocó que el mercado de opciones fuera declarado ilegal. No obstante lo anterior, en Inglaterra se continuaron utilizando las opciones de manera clandestina.

Aunque en los distintos mercados de Europa las opciones fueron utilizadas como mecanismo para controlar el riesgo asociado a las fluctuaciones en el precio de los productos agrícolas y posteriormente de las acciones, fue sólo hasta el año 1973 cuando se estableció el primer mercado organizado y regulado de opciones con la apertura de la *Chicago Board Option Exchange* (CBOE). A partir del establecimiento del CBOE y de diferentes mercados organizados en todo el mundo, las opciones y demás derivados financieros han tenido una gran expansión. Para ilustrar el gran auge que estos contratos han tenido, se cuenta con el registro del primer día de funcionamiento del CBOE, en el cual se negociaron 911 contratos, al año siguiente ya se negociaba una media de 20.000 contratos diarios y para el año 2000, únicamente en contratos de opciones sobre acciones de *Microsoft* se negoció un promedio diario de 25.000 contratos.

El gran auge de las opciones se debe a que este tipo de contratos han ocupado un lugar especial en las preferencias de los inversionistas, esto, debido a que su flexibilidad les permite cubrirse frente a los riesgos del mercado (variaciones en la tasa de cambio, tasa de interés, movimiento en el precio de los activos) o especular en busca de ganancias extraordinarias. Estas ventajas junto con el establecimiento de mercados organizados, explican el crecimiento acelerado del volumen de contratos realizados. De la misma manera, su gran difusión como tema de investigación académica se debe principalmente a los trabajos desarrollados por Robert Merton [45], Fischer Black y Myron Scholes [6], quienes lograron establecer el precio *óptimo* o *justo* que debe pagarse en el momento de suscribir el contrato ( $t = 0$ ), el cual, es conocido como el problema central de la valoración.

La metodología propuesta por Black-Scholes-Merton, consiste en la construcción de un portafolio réplica, compuesto por un activo libre de riesgo (bono) y una acción,

que logra reproducir los pagos de la opción en todos los momentos. Bajo el supuesto de ausencia de arbitraje <sup>2</sup>, si tanto el portafolio réplica como la opción ofrecen los mismos pagos en cada momento del tiempo, entonces ellos deben tener el mismo precio. Para obtener este valor, ellos generaron una ecuación diferencial parcial cuya solución, es la conocida *Fórmula de Black-Scholes*. De acuerdo con el modelo planteado por estos autores, el único parámetro desconocido es la volatilidad asociada al activo subyacente, la cual se supone constante durante la vigencia de la opción.

Posteriormente, Harrison y Kreps en 1979 [29] y Harrison y Pliska [30] en 1981 plantearon una metodología, conocida como *valoración neutral al riesgo* que logra llegar a las mismas ecuaciones que Black-Scholes. El procedimiento se realiza sobre un espacio de probabilidad dado  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , donde  $P$  refleja la probabilidad real de ocurrencia de un suceso. La metodología propuesta consiste en realizar un adecuado cambio de medida de  $P$  a  $P^*$ , sobre dicho espacio de probabilidad, el cual, permite valorar todos los activos del mercado en un escenario neutral al riesgo<sup>3</sup> utilizando para esto la tasa libre de riesgo<sup>4</sup>. Esta medida, llamada medida martingala equivalente (medida neutral al riesgo), es obtenida aplicando el teorema de Girsanov al proceso estocástico que rige el comportamiento del precio del activo riesgoso en el mercado. A partir de esta medida, es posible calcular la derivada de Radon-Nikodym y posteriormente establecer el precio justo de la opción.

La gran expansión de los mercados organizados de opciones, los aportes teóricos que permiten establecer precios justos de este tipo de contratos y la complejidad de los mercados modernos ha llevado a especificar y particularizar los productos financieros, de tal forma que éstos se adecúen a las necesidades de cada inversionista. Es de esta manera, como surgen las opciones exóticas como variaciones de las opciones estándar. Puntualmente, cualquier opción que implique una modificación a uno o más parámetros de las opciones estándar, se conoce como opción *Exótica*

Un grupo importante dentro de las opciones exóticas, son aquellas cuyo pago a la madurez del contrato depende de la trayectoria seguida por el precio del activo subyacente durante el período de vigencia de la opción. Estas opciones son conocidas como *dependientes de la trayectoria*. Siguiendo a Hunter[33], se encuentra que en 1982 se suscribió el primer contrato con este tipo de opciones, el cual,

<sup>2</sup>La ausencia de arbitraje implica que no es posible obtener una ganancia futura positiva con una inversión cero o lo que es lo mismo, asumiendo cero riesgo.

<sup>3</sup>En el escenario neutral al riesgo se supone que los inversionistas son indiferentes frente a las variaciones futuras de los precios de los activos, esto es, no son ni aversos ni amantes al riesgo.

<sup>4</sup>La tasa libre de riesgo es la que ofrecen los activos más seguros del mercado, los cuales generalmente son Bonos de los Gobiernos, la cual siempre es conocida.

consistió en una opción que le permitía al poseedor escoger el precio más favorable a pagar por cierta cantidad preestablecida de oro, plata o platino, dependiendo de los valores que hubieran tomado estos *activos subyacentes* durante la vigencia de la opción. Este tipo de opciones se conocen como *look-back options* y son un caso particular dentro de las opciones *dependientes de la trayectoria*. Otro caso particular, dentro del mismo grupo, son las *opciones de barrera*, en las cuales la opción deja de existir (el poseedor pierde el derecho a ejercerla) *knock out* o comienza a existir (es posible ejercerla a partir de ese momento) *knock in* cuando el subyacente alcanza (o supera) un determinado valor, conocido como *nivel de barrera*. Finalmente, se encuentran las *opciones asiáticas*, las cuales ofrecen un pago al final del período, que obedece al promedio, bien sea aritmético o geométrico, del precio tomado por el activo subyacente durante la vigencia del contrato. Este trabajo se centrará en el análisis de éste último grupo de opciones dada su importancia en los mercados OTC <sup>5</sup>, su amplia utilidad en las estrategias de cobertura en los mercados de divisas y de materias primas, entre otros; y en la importancia para las finanzas modernas del desarrollo de técnicas de valoración de opciones *exóticas* gracias a la aplicación de herramientas matemáticas y estadísticas.

Para analizar las opciones asiáticas, se debe determinar el tipo de promedio utilizado (aritmético o geométrico), el tipo de intervalo de tiempo (discreto o continuo), el tipo de *precio de ejercicio* (fijo o variable) y el tipo de contrato (pago al final del período o dentro de un intervalo de fechas establecido). De estas características dependerá la existencia de una solución analítica o la necesidad de utilizar métodos numéricos o de simulación para determinar el precio de la opción.

Aunque el mercado colombiano de opciones es incipiente en relación a los mercados europeos y norteamericanos, el amplio uso de este tipo de contratos en el mundo ha mostrado que son útiles, no sólo para los inversionistas y financieros que viven el día a día en los mercados, sino también para el sector real que busca cubrirse frente al riesgo que representa el cambio futuro de los precios, la tasa de cambio (peso/dólar o euro/dólar), las tasas de interés, entre otros. En esta medida, analizar las características y beneficios de las opciones resulta de gran importancia para la difusión y conocimiento de este tipo de contratos en mercados como el colombiano.

En particular, el hecho de que las opciones asiáticas estén basadas en el promedio del precio del activo subyacente, las vuelve atractivas para los inversionistas que buscan no sólo cubrirse frente al riesgo de la volatilidad del precio del activo subyacente, sino también frente al riesgo asociado con movimientos sorpresivos del

---

<sup>5</sup>Las opciones exóticas al ser instrumentos adaptados a las necesidades de inversionistas particulares (no son contratos estandarizados) se negocian en mercados OTC.

precio del activo subyacente antes de la fecha de vencimiento o a la manipulación de dicho precio justo antes del vencimiento. Igualmente, son atractivas para aquellas empresas que realizan transacciones periódicas en diferentes monedas y que por tanto se encuentran expuestas al riesgo de tasa de cambio. Más adelante en este documento se verá que además de permitir la cobertura del riesgo, el precio de las opciones asiáticas es menor que el precio de las opciones estándar y por tanto resultan más favorables para los inversionistas.

---

## Notación

---

$:=$	Significa <i>es definido por</i>
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}^+$	Es el conjunto de los números $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Es el conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	Es el conjunto de todas las n-plas de números reales
$a \wedge b$	$\min\{a, b\}$
$a \vee b$	$\max\{a, b\}$
$a^+$	$\max\{a, 0\}$
$a^-$	$\max\{-a, 0\}$
$C[0, 1]$	Conjunto de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$
$C^1[0, 1]$	Conjunto de funciones continuas diferenciables de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$
$C^2$	Conjunto de funciones continuas doblemente diferenciables en $\mathbb{R}$
$C^{1,2}([0, T] \times [0, \infty))$	Conjunto de funciones de $[0, T] \times [0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ continuas, diferenciables con respecto a la primera variable y doblemente diferenciables con respecto a la segunda variable
$\mathcal{B}(U)$	La menor $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos abiertos del espacio topológico $U$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}$	Es la $\sigma$ -álgebra Borel sobre $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	Es la $\sigma$ -álgebra Borel sobre $\mathbb{R}^d$
$(\mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$	$\sigma$ -álgebra generada por los rectángulos de la forma $A \times B$ donde $A \in \mathcal{B}$ y $B \in \mathcal{F}$
$\mathcal{P}(\Omega)$	Partes de $\Omega$
$\mathcal{M}_2^c$	Espacio de martingalas cuadrado integrables continuas

---

$L^p := L^p(\mu)$	Espacio de funciones reales $\mathcal{F}$ -medibles y P-integrables de orden $p$ , esto es,
	$\ X\ _p := \left( \int_{\Omega}  X ^p dP \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$
$1_A(x)$	$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
$X_n \rightarrow X$ c.s	Denota la convergencia casi siempre
$X_n \xrightarrow{L^p} X$	Denota la convergencia en $L^p$
$X_n \xrightarrow{P} X$	Denota la convergencia en probabilidad
$X_n \xrightarrow{d} X$	Denota la convergencia en distribución
$\mathcal{E}_T$	Exponencial estocástica



# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares Matemáticos y Estadísticos

---

En este capítulo se presentan las principales definiciones y resultados matemáticos y estadísticos que serán importantes para entender los modelos financieros de valoración de opciones empleados en esta tesis. Las definiciones y teoremas presentados en este capítulo, siguen principalmente la teoría expuesta en los trabajos de Nualart [52, 53], Korn [38], Mordecki [48, 49], Muñoz y Blanco [7], Karatzas [59] y Protter [55].

### 1.1. Procesos Estocásticos

Cuando se busca describir un fenómeno de la naturaleza que no puede ser predecido con certeza, se recurre al concepto de variable aleatoria. Adicionalmente, cuando se busca describir la evolución de dicho fenómeno en el tiempo, ya no es suficiente una única variable aleatoria, sino que se requiere trabajar con una familia de variables aleatorias, en este contexto resulta útil el concepto de **proceso estocástico**.

En particular, los procesos estocásticos permiten describir de manera adecuada el comportamiento del precio de los activos<sup>1</sup> financieros en los mercados, ya que éstos siguen un comportamiento aleatorio que responde a los cambios en la información disponible en cada momento del tiempo. Al ser esta nueva in-

---

<sup>1</sup>En este documento nos referiremos con este término a cualquier activo financiero cuyo valor sea incierto en el futuro y conocido en el presente. Por su parte con el término *activos contingentes* nos referiremos a los derivados financieros, en particular a las opciones, el cual es el derivado de interés en este documento. Cuando hagamos referencia a un activo libre de riesgo, se hará explícito en el texto.

formación impredecible, también lo será el comportamiento del precio de los activos.

El concepto que permite describir de manera formal estos cambios en la información disponible en el tiempo, se conoce como **filtración** y se define a continuación. Las filtraciones, nos permitirán establecer la información conocida por los inversionistas del mercado en el presente, comparado con lo que sabían en el pasado o lo que podrían saber en el futuro.

Para las definiciones de este capítulo se asume un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  completo.

**Definición 1.1.1** (Filtración). Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $\emptyset \neq I$  un conjunto ordenado de índices. Una familia  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  se llama filtración, si y sólo si  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  para todo  $s \leq t$ .

**Definición 1.1.2.** Al espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$  donde  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad y  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  es una filtración sobre  $\mathcal{F}$  se le llama espacio de probabilidad *filtrado*.

**Definición 1.1.3.** Un conjunto  $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in I}$  donde  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  es una filtración y  $(X_t)_{t \in I}$  es una familia de variables aleatorias (en adelante v.a) con valores en  $\mathbb{R}^d$  tales que  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -medible se llama *proceso estocástico* con filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ .

**Definición 1.1.4.** Dado un proceso estocástico  $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, +\infty)}$  se dice que él es *medible*, si la aplicación

$$\begin{aligned} [0, +\infty) \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (s, \omega) &\mapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

es  $\mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -medible.

**Observación 1.1.1.**  $\mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{F} := \sigma(A \times B, A \in \mathcal{B}([0, +\infty)), B \in \mathcal{F})$ , donde  $\mathcal{B}([0, +\infty))$  es la huella de  $\mathcal{B}$  sobre  $[0, +\infty)$ , es decir,  $\mathcal{B}([0, +\infty)) = \{M \cap [0, +\infty) : M \in \mathcal{B}\}$ .

**Notación 1.1.1.**

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t, t \in I) \quad (1.1)$$

denota la menor  $\sigma$ -álgebra con respecto a la cual las variables aleatorias  $X_s, s \leq t$  son medibles. Dicha filtración se llama *filtración canónica* o *natural* correspondiente al proceso  $(X_t)_{t \in I}$  y se interpreta como la *historia* del proceso hasta el tiempo  $t$ .

**Observación 1.1.2.** Si se considera en la definición (1.1.3) la filtración canónica, se habla simplemente de proceso estocástico con valores en  $\mathbb{R}^d$ .

Se tomará en adelante  $I = [0, T]$  o  $I = [0, +\infty)$ .

**Definición 1.1.5.** Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con valores en  $\mathbb{R}^d$ . Para cada  $\omega \in \Omega$  fijo, se define la función

$$\varphi_X(\omega) : t \rightarrow X_t(\omega), \quad t \in T.$$

Dicha función se llama  $\omega$ -trayectoria o  $\omega$ -realización del proceso  $X$ .

**Definición 1.1.6.** Un proceso  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  se dice *continuo* casi siempre (en adelante c.s), si las trayectorias del proceso son continuas c.s. De la misma manera, el proceso  $X$  se dice continuo por la derecha c.s (respectivamente continuo por la izquierda c.s), si las trayectorias del proceso son continuas por la derecha c.s (resp. continuas por la izquierda c.s).

**Observación 1.1.3.** Se usan las abreviaciones *càd*, *càg*, *càdlàg* y *càglàd* para denotar continuidad por la derecha, por la izquierda, por la derecha con límites por la izquierda y por la izquierda con límites por la derecha respectivamente.

**Definición 1.1.7.** Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico de valor real y  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ , entonces

$$F_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

se llama *función de distribución finito dimensional* de  $X$ .

**Definición 1.1.8.** Sean  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  y  $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$  procesos estocásticos reales definidos sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ . Se dice que

1.  $X$  y  $Y$  son *iguales* si  $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$  para todo  $t \in [0, +\infty)$  y para todo  $\omega \in \Omega$ .
2.  $Y$  es una *modificación* de  $X$  o  $X$  y  $Y$  son *equivalentes*, si para todo  $t \in [0, +\infty)$  se tiene que  $P(X_t = Y_t) = 1$ .
3. Los procesos  $X$  y  $Y$  son *estocásticamente equivalentes en sentido amplio* si  $X$  y  $Y$  tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.
4.  $X$  y  $Y$  son *indistinguibles* si  $P(X_t = Y_t, \forall t \in [0, +\infty)) = 1$ .

**Definición 1.1.9** (Adaptación). Un proceso estocástico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  es *adaptado* a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si para todo  $t \in [0, +\infty)$ ,  $X_t$  es una v.a  $\mathcal{F}_t$ -medible.

La idea de la definición (1.1.9) es que si un proceso estocástico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  es adaptado a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , entonces para cada  $t \in [0, +\infty)$  la v.a  $X_t$  sólo depende de la información contenida en  $\mathcal{F}_t$ .

**Observación 1.1.4.** Se observa que cada proceso  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  es adaptado a su filtración natural  $\tilde{\mathcal{F}}_t^X$ . Además, si  $X$  es adaptado a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  y  $Y$  es una modificación de  $X$ , entonces  $Y$  es adaptado a la misma filtración.

Sea  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtración. La  $\sigma$ -álgebra de eventos estrictamente anteriores a  $t > 0$  se define como

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma \left( \bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s \right)$$

y la  $\sigma$ -álgebra de eventos inmediatamente posteriores a  $t \geq 0$  se define como

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$$

Se dice que la filtración es *continua a derecha (respectivamente a izquierda)* si  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$  (respectivamente  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$ ) para todo  $t \geq 0$ .

**Notación 1.1.2.** Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se notará por

$$\mathcal{N} := \{F \in \mathcal{F} | P(F) = 0\},$$

la familia de eventos  $P$ -nulos.

**Definición 1.1.10.** Se dice que una filtración  $(\mathcal{F}_t)$  satisface las *condiciones usuales* con respecto a  $P$  si

- (i) La filtración es continua a derecha para todo  $t \geq 0$ .
- (ii)  $\mathcal{F}_0$  (y  $\mathcal{F}_t$  para todo  $t \geq 0$ ) contiene a  $\mathcal{N}$ .

Un tipo particular de proceso estocástico es el **proceso de Markov**, para el cual únicamente el estado actual del proceso es relevante al momento de predecir el estado futuro del mismo. Generalmente, se supone que los precios de los activos financieros siguen un proceso de Markov, en cuanto el precio actual del activo encierra toda la información disponible pasada y presente<sup>2</sup> y por tanto la tendencia futura esperada de los precios, depende únicamente del *presente* y es independiente del *pasado*.

**Definición 1.1.11** (Propiedad de Markov). Una colección  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  de v.a definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con valores en  $\mathbb{R}^d$  es un *proceso de Markov* de parámetro de tiempo continuo, si para  $k \geq 1$ ,  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq u$  y  $H \in \mathcal{B}^d$ ,

$$P(X_u \in H | X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) = P(X_u \in H | X_{t_k}) \quad (1.2)$$

<sup>2</sup>En la literatura financiera, este hecho es conocido como la *eficiencia débil del mercado*. Para profundizar en el tema puede consultarse [21].

con probabilidad 1. A (1.3) se le llama la *propiedad de Markov*. Esta propiedad es equivalente a

$$P(X_u \in H | X_s, s \leq t) = P(X_u \in H | X_t) \text{ c.s.}, \quad t \leq u. \quad (1.3)$$

Si el proceso es de valor real, equivalentemente se tiene que el proceso  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  es un *proceso de Markov* si para toda escogencia de reales  $t_1, \dots, t_n$  con  $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , se satisface

$$P(X_t \in (a, b] | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = P(X_t \in (a, b] | X_{t_n}) \text{ c.s.} \quad (1.4)$$

La propiedad de Markov nos dice que, para predecir el futuro del proceso  $X$ , conocer sólo el valor presente  $X_t$  brinda tanta información como conocer toda la historia del proceso hasta el tiempo  $t$ .

**Definición 1.1.12.** Una v.a  $X$  definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se dice integrable si  $E(|X|) < \infty$ .

**Definición 1.1.13.** Una v.a real  $Z$  definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se llama de *segundo orden* si  $E(|Z|^2) < \infty$ . La familia de todas las v.a de segundo orden sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se denota por  $L^2 := L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Definición 1.1.14.** Un proceso estocástico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es de *segundo orden* si

$$X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ para todo } t \geq 0.$$

**Definición 1.1.15.** Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico de segundo orden definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Se define la *media* y la *función de covarianza* del proceso como sigue

i. Media:

$$\mu(t) = E(X_t)$$

ii. Función de covarianza:

$$C(s, t) = E[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))]$$

Más adelante en este capítulo será introducido el concepto de Integral Estocástica de Itô, dicho concepto será fundamental para el desarrollo de este trabajo. Con el fin de definir dicha integral para procesos en el espacio  $L^2$ , se requiere definir los **procesos progresivamente medibles**, lo cual se realiza a continuación:

**Definición 1.1.16.** Sea  $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico. Se dice que el proceso es *progresivamente medible*, si y sólo si, para todo  $t \geq 0$ , la aplicación

$$\begin{aligned} [0, t] \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (s, \omega) &\mapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

es  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -medible.

**Observación 1.1.5.** De acuerdo con la teoría desarrollada en Korn[38] se tiene que:

1. Todo proceso progresivamente medible es medible.
2. Todo proceso medible posee una versión progresivamente medible.

## 1.2. Martingalas

Otro tipo particular de proceso estocástico son las **Martingalas**, dichos procesos serán importantes en la descripción de la teoría de valoración de opciones en el Capítulo 2, principalmente para la caracterización de los mercados libres de arbitraje y en la definición de la probabilidad neutral al riesgo.

**Definición 1.2.1** (Martingala). Un proceso  $\mathcal{F}_t$ -adaptado  $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ , es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala, esto es, una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si satisface lo siguiente:

1.  $E(|M_t|) < \infty$ , para todo  $t \geq 0$
2.  $E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$  c.s para todo  $s \leq t$ . (A este hecho se le conoce como propiedad de martingala).

**Nota 1.2.1.** Si la condición (2) de la definición anterior es modificada por:

- $E(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ ,  $s \leq t$  el proceso se llama *supermartingala*
- $E(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$ ,  $s \leq t$  el proceso se llama *submartingala*

El concepto de martingala, fue introducido por el matemático francés Paul Lèvy en 1934 y gran parte de su desarrollo se debe al matemático norteamericano Joseph Doob. Las martingalas son comúnmente utilizadas para describir lo que se conoce como un **juego justo**. Si dicho juego consta de apuestas sucesivas en  $t$  tiempos, con  $t \in [0, \infty)$  y  $M_t$  representa la riqueza de un apostador luego de participar en

la  $t$ -ésima ronda de dicho juego, entonces, para un momento  $t > s$ , la definición de martingala (1.2.1) implica que la riqueza del apostador debe satisfacer la condición  $E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ . Esto implica que, en promedio el apostador luego de participar en el juego tiene la misma riqueza que tenía antes de éste. En este sentido, un juego favorable para el apostador corresponderá a una submartingala y un juego desfavorable corresponderá a una supermartingala.

**Definición 1.2.2** (Tiempo de Parada). Un tiempo de parada<sup>3</sup> relativo a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una variable aleatoria

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Es decir, se puede decidir si se detiene o no el proceso, antes de un instante  $t$ , a partir de la información contenida en  $\mathcal{F}_t$ .

**Definición 1.2.3.** Una martingala  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una  $L^2$ -martingala o una martingala cuadrado integrable si  $E(|M_t|^2) < \infty$  para todo  $t \geq 0$ .

**Definición 1.2.4.** Un proceso  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es  $L^p$ -acotado, si y sólo si,  $\sup_{t \geq 0} E(|X_t|^p) < \infty$ .

**Notación 1.2.1.** El espacio de las martingalas  $L^2$ -acotadas se denota por  $\mathcal{M}_2$  y el subespacio de las martingalas continuas  $L^2$ -acotadas se denota por  $\mathcal{M}_2^c$ .

**Observación 1.2.1.** Se definen  $\mathcal{M}_2^c$  como el conjunto de las martingalas cuadrado integrables, continuas y con  $X_0 = 0$   $P$ -c.s y  $\mathcal{M}^c$  como el conjunto de las martingalas continuas y con  $X_0 = 0$   $P$ -c.s

## 1.3. Movimiento Browniano

Las características y el comportamiento de los activos en los mercados financieros, han sido ampliamente estudiados a lo largo del tiempo. En particular, Bachelier en 1900 [3] estudió por primera vez el comportamiento de los activos financieros de acuerdo a las observaciones realizadas al precio de las acciones en la bolsa de París. En su tesis doctoral, Bachelier describe el comportamiento de los precios de los activos, por medio de un proceso estocástico particular, conocido como *movimiento browniano*.

El proceso estocástico que se describirá en esta sección se conoce con el nombre de *movimiento browniano* en honor al botánico escocés Robert Brown, quien en

---

<sup>3</sup>Para profundizar en este tema consultar Korn[38].

1827 observó el comportamiento de las partículas de polen suspendidas en el agua y notó que dichas partículas tenían movimientos irregulares. Fue en 1905 [20] Albert Einstein quien mostró que el movimiento aleatorio de dichas partículas era el resultado de los constantes choques de éstas con las moléculas de agua. El matemático norteamericano Norbert Wiener en 1923 demostró rigurosamente la existencia del proceso estocástico descrito por Brown, el cual recibió el nombre de *movimiento browniano* o *proceso de Wiener*.

Actualmente este proceso estocástico es utilizado para modelar el precio de activos financieros como el de las acciones, ruidos térmicos en circuitos eléctricos o algunos comportamientos límite en sistemas de filas e inventarios, entre otras aplicaciones.

**Definición 1.3.1** (Movimiento Browniano). Un proceso estocástico con valores en  $\mathbb{R}$ ,  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$  se llama *movimiento browniano estándar* o *proceso de Wiener* unidimensional, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $W_0 = 0$  *c.s.*
2. Fijados  $n$  instantes  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  los incrementos  $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$ , son *v.a* independientes.
3. Si  $s < t$ , el incremento  $W_t - W_s$  tiene una distribución  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .
4. Las trayectorias del proceso son funciones continuas *c.s.*

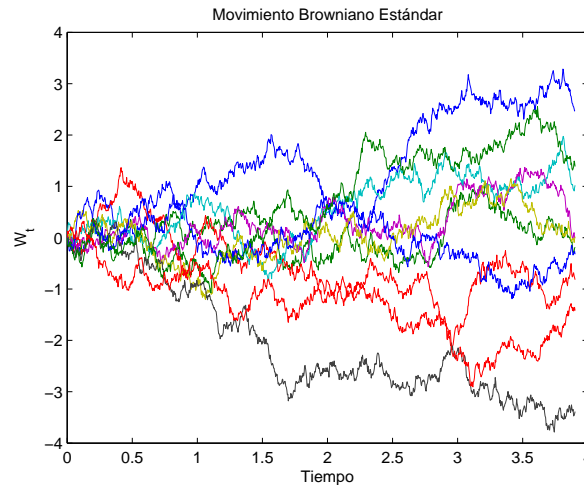


FIGURA 1.1. Diez realizaciones del movimiento browniano estándar



Un movimiento browniano o proceso de Wiener **d** – **dimensional** es un proceso estocástico con valores en  $\mathbb{R}^d$  de la forma:

$$W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d) \quad (1.5)$$

donde los componentes  $W_t^i$  son movimientos brownianos unidimensionales independientes.

**Observación 1.3.1.** En el documento se trabajará con la P-extensión de la filtración canónica asociada al movimiento browniano:

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma(\tilde{\mathcal{F}}_t^W \cup \mathcal{N}) \quad (1.6)$$

donde  $\tilde{\mathcal{F}}_t^W$  es la filtración natural de W. La filtración  $\mathcal{F}_t^W$  también se conoce como *filtración estándar*.

**Observación 1.3.2.** Siguiendo a Korn [38] y a Pascucci [54], es posible demostrar que la filtración natural del movimiento browniano o *filtración browniana*, así como la filtración estándar del movimiento browniano satisfacen las llamadas *condiciones usuales*<sup>4</sup>.

La existencia de un proceso estocástico que cumpla con las tres primeras condiciones de la definición (1.3.1), es garantizada por el Teorema de Existencia de Kolmogorov<sup>5</sup>. Adicionalmente, la existencia de una versión del proceso de movimiento browniano con trayectorias continuas puede ser demostrada por medio de diversos métodos, entre ellos el de Kolmogorov-Čentsov, el del espacio de Hilbert o por aproximación por procesos más simples. Estos tres métodos pueden ser consultados en Muñoz y Blanco [7].

A continuación se exponen las características y propiedades del movimiento browniano más relevantes para nuestro estudio.

**Teorema 1.3.1.** Si  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar unidimensional, se tiene que:

1.  $E[W_t] = 0$
2.  $E[W_s W_t] = \min(s, t)$
3.  $E[|W_t - W_s|^2] = |t - s|$

---

<sup>4</sup>Ver definición (1.1.10).

<sup>5</sup>Ver Muñoz y Blanco [7] P. 10. La demostración también puede ser consultada en el libro de Karatzas [59] capítulo 2.2.

*Demostración:* 1. Como la *densidad* de  $W_t$  está dada por:

$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

es decir, como  $W_t$  tiene una distribución  $N(0, t)$ , entonces es claro que  $E[W_t] = 0$

2. Suponga que  $s < t$  entonces

$$\begin{aligned} E[W_s W_t] &= E[W_s((W_t - W_s) + W_s)] \\ &= E[W_s(W_t - W_s)] + E[W_s^2] \\ &= E[W_s]E[W_t - W_s] + E[W_s^2] \\ &= E[W_s^2] = Var[W_s] = s = \min(s, t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

3.

$$\begin{aligned} E[|W_t - W_s|^2] &= E[(W_t - W_s)^2] \\ &= E[W_t^2 - 2W_t W_s + W_s^2] \\ &= E[W_t^2] - E[2W_t W_s] + E[W_s^2] \\ &= t - 2\min(s, t) + s \\ &= \begin{cases} s - t & \text{si } t < s \\ t - s & \text{si } s < t \end{cases} \\ &= |t - s| \end{aligned} \tag{1.8}$$

□

**Teorema 1.3.2.** *Un movimiento browniano  $W_t$  unidimensional es una martingala respecto a su filtración natural.*

*Demostración:* Para esto se verificarán las condiciones de martingala

1. Se sabe que todo proceso estocástico es adaptado a su filtración natural.
2.  $E(|W_t|) < \infty$ , para todo  $t \geq 0$  ya que:

$$E(|W_t|) = \int_{-\infty}^{\infty} |s| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(s-y)^2}{2t}} ds = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty$$

3. para  $s \leq t$

$$\begin{aligned}
 E[W_t | \mathcal{F}_s] &= E[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + E[W_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= E[W_t - W_s] + W_s \\
 &= W_s
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.3.3.** Si  $W$  es un movimiento browniano entonces  $W \in \mathcal{M}_2^c$

*Demostración.* En el teorema (1.3.2) se demostró que  $W$  es una martingala respecto a su filtración natural. Además por definición  $W$  es continuo, entonces para que se cumpla que  $W \in \mathcal{M}_2^c$  falta verificar que  $W$  es cuadrado integrable, es decir que  $E(W_t^2) < \infty$ , lo cual se tiene, ya que por definición

$$W_t \stackrel{d}{=} N(0, t)$$

luego

$$\begin{aligned}
 E(W_t^2) &= Var(W_t) \\
 &= t < \infty
 \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que  $W$  es cuadrado integrable, además como por definición  $W_0 = 0$  se tiene que  $W \in \mathcal{M}_2^c$ . □

**Definición 1.3.2.** Sean  $W^i, W^j$  dos movimientos brownianos estándar. La variación cruzada  $\langle W^i, W^j \rangle$  se define por

$$\langle W^i, W^j \rangle = \frac{1}{2} (\langle W^i + W^j, W^i + W^j \rangle_t - \langle W^i, W^i \rangle_t - \langle W^j, W^j \rangle_t) \quad (1.9)$$

donde  $\langle W^i, W^j \rangle_t = \delta_{ij}t$  para  $t \in [0, T]$ . En el caso en que  $i = j$  se denota  $\langle W \rangle$  y se conoce como *variación cuadrática* de  $W$ , donde por definición se tiene que  $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Por tanto  $\langle W \rangle_t = t$ .

A continuación se presenta una característica importante del movimiento browniano, la cual motivará la definición de la integral estocástica respecto del movimiento browniano. El movimiento browniano pertenece a una clase de procesos estocásticos conocidos como *autosimilares*, los cuales se caracterizan por tener trayectorias irregulares. Esto significa que las trayectorias del proceso, observadas bajo diferentes escalas en cualquier intervalo de tiempo, tienen una forma similar pero no son idénticas.

**Definición 1.3.3** (Autosimilaridad). Se dice que un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  es  $H$ -autosimilar para algún  $H > 0$ , si sus distribuciones finito dimensionales satisfacen

$$(T^H X_{t_1}, T^H X_{t_2}, \dots, T^H X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, X_{Tt_2}, \dots, X_{Tt_n})$$

para todo número real  $T > 0$  y para toda elección de puntos  $t_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $n \geq 1$ , donde  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

En particular, para el movimiento browniano se tiene que:

**Teorema 1.3.4.** *El movimiento browniano es un proceso  $\frac{1}{2}$ -autosimilar, es decir*

$$(T^{\frac{1}{2}} W_{t_1}, T^{\frac{1}{2}} W_{t_2}, \dots, T^{\frac{1}{2}} W_{t_n}) \stackrel{d}{=} (W_{Tt_1}, W_{Tt_2}, \dots, W_{Tt_n})$$

para todo número real  $T > 0$  y para toda elección de puntos  $t_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración:* Dado que el proceso  $(W_t)_{t \geq 0}$  es gaussiano, es suficiente con demostrar que los procesos  $(T^{\frac{1}{2}} W_t)_{t \geq 0}$  y  $(W_{Tt})_{t \geq 0}$  tienen la misma media y covarianza

1.  $E \left[ T^{\frac{1}{2}} W_t \right] = T^{\frac{1}{2}} E [W_t] = 0 = E [W_{Tt}]$
- 2.

$$\begin{aligned} \text{cov} \left( T^{\frac{1}{2}} W_t, T^{\frac{1}{2}} W_s \right) &= T \text{cov} (W_t, W_s) \\ &= T \min (t, s) \\ &= \min (Tt, Ts) \\ &= \text{cov} (W_{Tt}, W_{Ts}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

□

Los procesos autosimilares tienen una propiedad importante, la cual se describe a continuación

**Teorema 1.3.5.** *Sea  $(X_t)$  un proceso con incrementos estacionarios,  $H$ -autosimilar para algún  $H \in (0, 1)$ , entonces para todo  $t_0$  fijo se tiene*

$$\lim_{t \downarrow t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty$$

esto es, con probabilidad 1 las trayectorias de los procesos  $H$ -autosimilares no son diferenciables en ningún punto.

*Demostración:* La demostración puede ser consultada en Mikosh[46] proposición A3.1.  $\square$

A partir del teorema anterior se puede demostrar una propiedad importante del movimiento browniano

**Teorema 1.3.6.** *Las trayectorias del movimiento browniano  $(W_t)_{t \geq 0}$  no son diferenciables en ningún punto.*

*Demostración:* Ya se demostró en el teorema (1.3.4) que el movimiento browniano es un proceso  $\frac{1}{2}$ -autosimilar.  $\square$

El primero en construir una función continua que no era diferenciable en ningún punto fue Weierstrass en el siglo XIX. Sin embargo, en ese momento fue considerada como una curiosidad sin ninguna aplicación real. No obstante, se ha mostrado que el movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto y aún así tiene aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias.

Otra característica importante del movimiento browniano es que sus trayectorias no son de variación acotada, tal y como se muestra a continuación:

**Teorema 1.3.7.** *Las trayectorias del movimiento browniano no tienen variación acotada en el intervalo  $[0, T]$ . Esto es*

$$\sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n |W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)| \right\} = \infty$$

donde el supremo es tomado sobre todas las posibles particiones  $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  del intervalo  $[0, T]$ .

*Demostración:* La demostración puede ser consultada en Nualart [53] p.17 o en Mikosh[46] proposición A3.2  $\square$

Existen ocasiones en las que resulta conveniente tener la posibilidad de verificar si un proceso estocástico dado es un movimiento browniano. Para esto será útil el teorema de caracterización del movimiento browniano establecido por Paul Lévy.

**Teorema 1.3.8.** *Sea  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  una martingala relativa a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Suponga que  $M_0 = 0$ ,  $M_t$  tiene trayectorias continuas y la variación cuadrática de  $M$  satisface  $\langle M \rangle_t = t$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces  $M_t$  es un movimiento browniano.*

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Shreve [58] Teorema 4.6.4 o en Steele [60] Teorema 12.5.  $\square$

### 1.3.1. Movimiento Browniano Geométrico

Bachelier en su tesis doctoral [3] en el año 1900, propuso que las acciones evolucionaban en el tiempo de acuerdo con el modelo

$$L_t = L_0 + \sigma W_t + \nu t,$$

donde  $W_t$  es un movimiento browniano,  $L_t, L_0$  son los precios de la acción en los momentos  $t$  y  $0$  respectivamente,  $\sigma$  es la volatilidad de la acción y  $\nu$  es la tendencia. Sin embargo, se sabe que  $W_t$  es gaussiano y por tanto  $L_t$  puede tomar valores negativos, mientras que los precios reales de los activos son siempre no negativos. Esta situación fue corregida en 1965 por Paul Samuelson [57] quien, luego de analizar el trabajo de Bachelier, propuso el movimiento browniano geométrico para describir el comportamiento de los precios de los activos riesgosos. Este modelo propuesto por Samuelson fue utilizado más adelante por Black y Scholes [6] para definir el comportamiento del precio de los activos riesgosos en su modelo de valoración de opciones.

**Definición 1.3.4** (movimiento browniano geométrico). El movimiento browniano geométrico  $(X_t)_{t \geq 0}$  se define como la exponencial del movimiento browniano con deriva y está dado por

$$X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}$$

donde  $t \geq 0$ ,  $W_t$  es el movimiento browniano estándar,  $\sigma > 0$  y  $\mu \in \mathbb{R}$ .

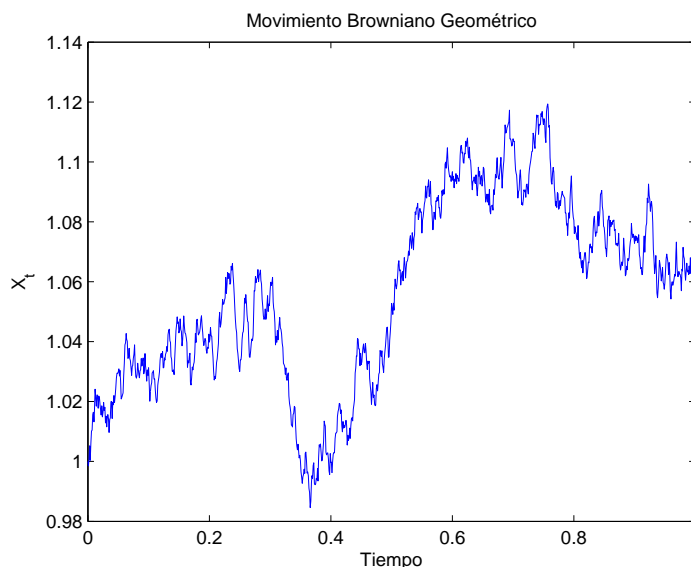


FIGURA 1.2. Una realización del movimiento browniano geométrico de parámetros  $\mu = 3,5\%$ ,  $\sigma = 10\%$

**Teorema 1.3.9.** *El valor esperado y la varianza del movimiento browniano geométrico  $(X_t)_{t \geq 0}$  vienen dados por:*

$$E(X_t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$$

y

$$\text{cov}[X_s, X_t] = e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}(e^{\sigma^2 s} - 1).$$

*Demostración.* En primer lugar<sup>6</sup> se probará el valor esperado y en segundo lugar la varianza del movimiento browniano geométrico.

1.

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E[e^{\mu t + \sigma W_t}] \\ &= e^{\mu t} E[e^{\sigma W_t}] \end{aligned}$$

dado que  $W_t$  es  $\frac{1}{2}$ -autosimilar, entonces se tiene que

$$E(X_t) = e^{\mu t} E[e^{\sigma \sqrt{t} W_1}]$$

lo que se tiene en la expresión  $E[e^{\sigma \sqrt{t} W_1}]$  es la f.g.m de  $W_1$  evaluada en  $\sigma \sqrt{t}$  y como  $W_1 \stackrel{d}{=} N(0, 1)$ , entonces:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

---

<sup>6</sup>Para describir las propiedades del MBG es útil el concepto de función generadora de momentos (en adelante f.g.m). Por definición, la f.g.m de un variable aleatoria  $X$  denotada por  $m_X(t)$  viene dada por  $m_X(t) = E(e^{tX})$  con  $t \in (-\infty, \infty)$ . Adicionalmente, si  $X \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2)$ , es posible demostrar que  $m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

2. Si  $s \leq t$  se tiene que  $W_t - W_s$  y  $W_s$  son independientes y  $W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\text{cov}[X_s, X_t] &= E[X_s X_t] - E[X_s]E[X_t] \\
&= E[e^{\mu(s+t) + \sigma(W_t + W_s)}] - e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s}{2}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\
&= e^{\mu(s+t)} E[e^{\sigma(W_t + W_s)}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\
&= e^{\mu(s+t)} E[e^{\sigma(W_t - W_s + 2W_s)}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\
&= e^{\mu(s+t)} E[e^{\sigma(W_t - W_s)}] E[e^{2\sigma W_s}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\
&= e^{\mu(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} e^{2\sigma^2 s} - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\
&= e^{\mu(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t+s)} e^{\sigma^2 s} - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\
&= e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} (e^{\sigma^2 s} - 1)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

□

**Lema 1.3.1.** Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar unidimensional en  $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces el proceso  $M_t^\lambda$  definido como

$$M_t^\lambda := \exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right) \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.13}$$

es una martingala respecto a la filtración  $\mathcal{F}^W$  y  $M_0^\lambda = 1$ .

*Demostración.* Para esto, se verificarán las condiciones de martingala.

1. Por definición  $W_t$  es adaptado a la filtración estándar  $\mathcal{F}^W$  por tanto  $M_t^\lambda$  es adaptado a la misma filtración.
2.  $E(|M_t^\lambda|) < \infty$ . Para demostrar este resultado se siguen las mismas líneas de la demostración del valor esperado del movimiento browniano geométrico en el teorema (1.3.9).

$$\begin{aligned}
E(|M_t^\lambda|) &= E\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t\right) E(\exp(\lambda W_t)) \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t\right) \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t\right) \\
&= e^0 = 1 < \infty
\end{aligned} \tag{1.14}$$



3. Para  $s < t$  se tiene

$$\begin{aligned} E(M_t^\lambda | \mathcal{F}_s) &= E \left( \exp \left( \lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right) | \mathcal{F}_s \right) \\ &= \exp \left( \lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s \right) E \left( \exp (\lambda (W_t - W_s)) | \mathcal{F}_s \right) \end{aligned}$$

por la independencia del incremento  $W_t - W_s$  de  $\mathcal{F}_s$  y tomando la f.g.m de  $Z = \frac{W_t - W_s}{\sqrt{t-s}} \sim N(0, 1)$  se tiene que

$$\begin{aligned} E(M_t^\lambda | \mathcal{F}_s) &= \exp \left( \lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s \right) E \left( \exp (\lambda (W_t - W_s)) \right) \\ &= \exp \left( \lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s \right) E \left( \exp (\lambda Z \sqrt{t-s}) \right) \\ &= \exp \left( \lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s \right) \exp \left( \frac{\lambda^2}{2} (t-s) \right) \\ &= \exp \left( \lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s \right) = M_s^\lambda \end{aligned}$$

□

## 1.4. Integral de Itô

Para entender el procedimiento llevado a cabo por Black y Scholes y la metodología de valoración de opciones neutral al riesgo, resulta necesaria la aplicación de los conceptos de integración estocástica, en particular del cálculo para integrales con respecto a un proceso de Wiener o movimiento browniano. Para esto, debemos recurrir a los desarrollos realizados por el matemático japonés Kiyoshi Itô en el año 1944.

La integral de Itô de un proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$   $d$ -dimensional respecto del movimiento browniano estándar  $d$ -dimensional  $W$ , es una integral de la forma:

$$\int_0^t X_s \cdot dW_s \tag{1.15}$$

donde “ $\cdot$ ” hace referencia al producto punto en  $\mathbb{R}^d$ . Esta integral es el tema central de esta sección.

### 1.4.1. Consideraciones Generales

Uno de los principales interrogantes que surge cuando se plantea una integral de la forma (1.15), es ¿si es posible definir dicha integral en el sentido de una integral de Riemann? o ¿trayectoria por trayectoria en el sentido de Riemann-Stieltjes?.

En primer lugar, de acuerdo con el teorema (1.3.6) se sabe que las trayectorias del movimiento browniano no son diferenciables en ningún punto y por tanto para definir la integral (1.15) no es posible utilizar una expresión de la forma

$$\int_0^t X_s \cdot dW_s = \int_0^t X_s(\omega) \frac{dW_s(\omega)}{ds} ds \quad (1.16)$$

En segundo lugar, si se tiene un proceso real no negativo  $X = \{X_t\}_{t \in [0, +\infty)}$  definido sobre un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tal que las trayectorias  $t \mapsto X_t(\omega)$  son funciones  $\mathcal{B} \cap [0, +\infty)$ -medibles y si además se tiene un proceso creciente<sup>7</sup>  $\{A_t, t \in [0, +\infty)\}$  definido sobre el mismo espacio de probabilidad, entonces para cada  $\omega \in \Omega$  es posible calcular la integral  $I_t(\omega)$  en el sentido de Lebesgue-Stieltjes, esto es,

$$\begin{aligned} I_t(\omega) &= \int_0^t X_s(\omega) dA_s(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X\left(\frac{(k-1)t}{n}, \omega\right) \left[ A\left(\frac{kt}{n}, \omega\right) - A\left(\frac{(k-1)t}{n}, \omega\right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sin embargo, en el caso en que el proceso  $A_t$  es reemplazado por un movimiento browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  no es posible utilizar una definición de la forma (1.17) para la integral (1.15) ya que, de acuerdo con el teorema (1.3.7) las trayectorias del movimiento browniano no son de variación acotada en el intervalo  $[0, 1]$  y por tanto no se cumplen las condiciones para dicha definición<sup>8</sup>.

Por tanto, ya que no es posible utilizar una definición de tipo Riemann ni de tipo Riemann-Stieltjes para definir la integral (1.15), es necesario construir una nueva clase de integral, llamada *integral estocástica*, el cual es el tema central de esta sección.

En primer lugar, se definirá la integral estocástica (1.15) para un tipo espe-

<sup>7</sup>o de forma general con trayectorias de variación acotada sobre cada intervalo de la forma  $[0, +\infty)$

<sup>8</sup>En cuanto las trayectorias del proceso  $A_t$  no serán de variación acotada sobre cada intervalo de la forma  $[0, +\infty)$

cial de procesos llamados procesos simples y luego se definirá para integrandos que pertenezcan a  $L^2_{[0,T]}$  como el límite en media cuadrática de la integral estocástica de procesos simples.

**Definición 1.4.1.** Se notará  $L^2_{[0,T]}$  el conjunto de procesos estocásticos  $X = \{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  que satisfacen:

- i)  $\{X_t\}_t$  es progresivamente medible.
- ii)  $E \left( \int_0^T |X_u|^2 du \right) < \infty$ . Donde  $|\cdot|$  hace referencia a la norma en  $\mathbb{R}^d$ .

### 1.4.2. Construcción de la integral estocástica para procesos simples

En primer lugar se definirá la integral de Itô para procesos simples. Para esto se supondrá un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  completo y filtrado. Además se supondrá que sobre este espacio de probabilidad está definido un movimiento browniano  $d$ -dimensional  $\{W_t; t \geq 0\}$  respecto a la filtración estándar  $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ <sup>9</sup>.

**Definición 1.4.2** (Proceso Simple). Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$   $d$ -dimensional se llama *simple* o *elemental* si existen números reales  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , y variables aleatorias  $d$ -dimensionales acotadas  $\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , con

$$\Phi_0, \mathcal{F}_0 - \text{medible}, \quad \Phi_i, i = 1, \dots, p, \mathcal{F}_{t_{i-1}} - \text{medibles}$$

tal que  $X_t(\omega)$  tiene la siguiente representación:

$$X_t(\omega) = X(t, \omega) = \Phi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^p \Phi_i(\omega) 1_{\{(t_{i-1}, t_i]\}}(t)$$

para cada  $\omega \in \Omega$ .

Los procesos simples son procesos constantes a trozos, con trayectorias *càdlàg* y cuadrado integrables.

**Definición 1.4.3** (Integral estocástica para procesos simples). La integral estocástica de Itô  $I_t(X)$  para  $t \in (t_k, t_{k+1}]$ , de un proceso simple  $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ , respecto al movimiento browniano, se define de acuerdo con:

$$I_t(X) := \int_0^t X_s \cdot dW_s := \sum_{1 \leq i \leq k} \Phi_i \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_{k+1} \cdot (W_t - W_{t_k}), \quad (1.18)$$

<sup>9</sup>Ver observación (1.3.1).

o en general para  $t \in [0, T]$ :

$$I_t(X) := \int_0^t X_s \cdot dW_s := \sum_{1 \leq i \leq p} \Phi_i \cdot (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}). \quad (1.19)$$

**Teorema 1.4.1** (Propiedades de la integral estocástica). *Sean  $X := \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  y  $Y := \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$  procesos simples, entonces se tiene:*

1.  $\{I_t(X)\}_{t \in [0, T]}$  es una martingala continua con respecto a  $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$ . En particular, se tiene  $E(I_t(X)) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .
2. (Isometría de Itô)

$$E(I_t(X)^2) = E\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2 = E\left(\int_0^t X_s^2 ds\right) \text{ para } t \in [0, T]. \quad (1.20)$$

3.  $I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

*Demostración:* La demostración de estas propiedades puede ser consultada en Korn[38] p.31.  $\square$

**Observación 1.4.1.** De acuerdo con la isometría de Itô la integral estocástica es un proceso estocástico cuadrado integrable.

**Ejemplo 1.4.1.** Para el proceso simple  $\Phi \equiv 1$  se tiene

$$\int_0^t 1 dW_s = W_t$$

y por tanto

$$E\left(\int_0^t dW_s\right)^2 = E(W_t^2) = t = \int_0^t ds$$

### 1.4.3. Extensión de la Integral Estocástica a procesos en $L^2_{[0, T]}$

Una vez definida la integral estocástica para procesos simples, es posible extenderla a procesos en  $L^2_{[0, T]}$ . A continuación se presenta un teorema, el cual es el medio para poder extender la integral estocástica a cualquier proceso de  $L^2_{[0, T]}$  a partir de procesos simples.

**Teorema 1.4.2.** *Un proceso estocástico arbitrario  $X = (X_t)_{t \in [0, T]} \in L^2_{[0, T]}$  puede ser aproximado por una secuencia de procesos simples  $X^n$ . En particular, existe una*

secuencia  $X^n$  de procesos simples tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T (|X_s - X_s^n|)^2 ds \right] = 0 \quad (1.21)$$

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Korn [38] teorema 2.40.  $\square$

La integral general de Itô se establece en la siguiente definición:

**Definición 1.4.4.** Sea  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  un proceso en  $L^2_{[0, T]}$ . La integral de Itô de  $X$  en  $[0, t]$  se define por:

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X_s^n dW_s \text{ en } L^2_{[0, T]} \quad (1.22)$$

donde  $X_s^n$  es una sucesión de procesos simples que converge a  $X$  de acuerdo con la ecuación (1.21).

**Proposición 1.4.1.** Para cualquier proceso  $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$  en  $L^2_{[0, T]}$  la integral estocástica  $I(X)$  existe, es única (casi siempre) y satisface

$$E(|I(X)|^2) = E \left( \int_0^T |X_u|^2 du \right) \quad (1.23)$$

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Brzezniak [13] Proposición 7.2.  $\square$

**Teorema 1.4.3.** Sea  $X = (X_t)_{t \in [0, T]} \in L^2_{[0, T]}$  entonces

$$M_t(\omega) := \int_0^t X(s, \omega) dW_s$$

es una martingala con respecto a  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$ .

*Demostración:* La demostración puede ser consultada en Muñoz y Blanco [7] p.176.  $\square$

**Teorema 1.4.4** (Propiedades de la Integral Estocástica). Sean  $f$  y  $g \in L^2_{[0, T]}$ , si  $0 \leq S < U < T$  entonces:

1.

$$\int_S^T f \cdot dW_t = \int_S^U f \cdot dW_t + \int_U^T f \cdot dW_t \text{ c.s.}$$

2.

$$\int_S^T (cf + g)dW_t = c \int_S^T f \cdot dW_t + \int_S^T g \cdot dW_t \quad \text{c.s. donde } c \text{ es constante.}$$

3.

$$E \left[ \int_S^T f \cdot dW_t \right] = 0$$

4.

$$\int_S^T f \cdot dW_t$$

es  $\mathcal{F}_T$ -medible.

La demostración de estas propiedades se basa en la prueba dada para procesos elementales y puede ser consultada en Kloeden *et al* [37].

#### 1.4.4. Lema de Itô

Evaluar integrales de Itô a partir de la definición no es sencillo, es por esto que uno de los resultados fundamentales del cálculo estocástico es el **lema** o la **fórmula de Itô**, la cual, permite evaluar una integral de Itô sin necesidad de recurrir a su definición. Este lema puede verse como el homólogo estocástico de la regla de la cadena para las integrales de Riemann-Stieltjes.

**Definición 1.4.5.** Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano unidimensional sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Una *integral estocástica unidimensional* o *proceso de Itô* es un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tal que

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega)ds + \int_0^t v(s, \omega)dW_s(\omega) \quad (1.24)$$

donde  $v \in L^2_{[0, +\infty)}$ ,  $u$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado y además

$$P \left( \int_0^t |u(s, \omega)|ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0 \right) = 1.$$

**Observación 1.4.2.** Si  $X_t$  es una integral de la forma (1.24), usualmente se escribe

$$dX_t = udt + v dW_t \quad (1.25)$$

y se llama la forma diferencial del proceso de Itô

**Teorema 1.4.5** (Fórmula de Itô Unidimensional). *Sea  $W_t$  un movimiento browniano unidimensional,  $X_t$  una integral estocástica de la forma (1.25) y  $g : [0, \infty) \times$*

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  doblemente diferenciable, entonces  $Y_t = g(t, X_t)$  es nuevamente un proceso de Itô y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 \quad (1.26)$$

para todo  $t \geq 0$ , donde  $dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = 0$  y  $dW_t \cdot dW_t = dt$

*Demostración.* La demostración puede ser consultada en Korn [38] teorema 2.49.  $\square$

**Observación 1.4.3.** Por (1.25) se tiene que  $dX_t = udt + vdW_t$ , entonces

$$\begin{aligned} (dX_t^2) &= (udt + vdW_t)(udt + vdW_t) \\ &= u^2dt \cdot dt + uvdt \cdot dW_t + vudW_t \cdot dt + v^2dW_t \cdot dW_t \\ &= v^2dt \end{aligned} \quad (1.27)$$

**Ejemplo 1.4.2.** Sea  $X_t = t$ . Este proceso puede representarse de la forma:

$$X_t = 0 + \int_0^t 1ds + \int_0^t 0dW_s$$

Sea  $f(t) \in C^2$ , al aplicar la fórmula de Itô (1.4.5) para la función  $g(t, x) = f(t)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} Y_t &= g(t, X_t) = f(t) \\ dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) = f'(t)dt \\ Y_t &= \int_0^t f'(s)ds + C = f(0) + \int_0^t f'(s)ds, \end{aligned}$$

ya que  $C = f(0)$ . Este resultado lo que nos muestra es que el teorema fundamental del cálculo se obtiene como un caso particular de la fórmula de Itô.

### 1.4.5. Teorema de Representación de Martingalas

Dentro de las propiedades de la integral estocástica descritas anteriormente en este capítulo, se estableció<sup>10</sup> una relación importante entre las martingalas continuas y el movimiento browniano, es decir, que un proceso de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s \cdot dW_s$$

es una martingala respecto de la filtración estándar del movimiento browniano  $\{\mathcal{F}_t^W\}$ , donde  $f \in L^2_{[0,+\infty)}$ . En esta sección lo que se mostrará es que el recípro-

<sup>10</sup>Ver Teorema (1.4.3).

co también es cierto: una martingala relativa a  $\{\mathcal{F}_t^W\}$  puede ser representada como una integral de Itô. Este importante resultado se conoce como el teorema de representación de martingalas.

**Definición 1.4.6.** Una martingala de valor real  $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$  con respecto a la filtración estándar del movimiento browniano  $\{\mathcal{F}_t^W\}_t$  se llama *martingala browniana*

**Teorema 1.4.6** (Teorema de Representación de Martingalas). Sea  $\{(M_t, \mathcal{F}_t^W)\}_{t \in [0, T]}$  una martingala browniana con

$$E(M_t^2) < \infty \quad \forall t \in [0, T]$$

Entonces existe un proceso  $\psi_t$  con  $t \in [0, T]$  en  $L^2_{[0, T]}$  tal que

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t \psi_s dW_s \quad P - c.s \text{ para todo } t \in [0, T].$$

*Demostración.* La demostración puede ser consultada en Korn [38] teorema 2.68 o en Nualart [53] Teorema 14.  $\square$

## 1.5. Teorema de Girsanov

Esta sección será de gran importancia para el desarrollo de nuestro trabajo, puesto que el teorema de Girsanov es una pieza fundamental dentro del procedimiento para valoración de opciones neutral al riesgo. En particular, por medio de la aplicación de este teorema, el movimiento browniano con deriva  $W_t + \lambda t$  puede verse como un movimiento browniano sin deriva ante un *adecuado* cambio de probabilidad.

En primer lugar se introducirá el concepto de derivada de Radon-Nikodym, para lo cual resulta necesaria la observación a continuación y la definición de **exponencial estocástica**.

**Observación 1.5.1.** Dadas dos medidas  $\mu, \vartheta$  en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ , se dice que  $\vartheta$  es  $\mu$ -absolutamente continua en  $\mathcal{F}$  si para todo  $A \in \mathcal{F}$  tal que  $\mu(A) = 0$ , se tiene  $\vartheta(A) = 0$ . Lo cual se denota  $\vartheta \ll \mu$ .

Si  $\mu \ll \vartheta$  y  $\vartheta \ll \mu$ , entonces se dice que las medidas  $\mu$  y  $\vartheta$  son equivalentes y se denota  $\mu \sim \vartheta$ .

**Definición 1.5.1.** Sea  $W$  un movimiento browniano estándar  $d$ -dimensional definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}, P)$  y  $\lambda$  un proceso en  $\mathbb{R}^d$  que pertenece a  $L^2_{[0, T]}$ . Si se define el proceso de valor real  $U^\lambda$  adaptado a la filtración



$(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  como sigue:

$$U_t^\lambda = \int_0^t \lambda_u \cdot dW_u \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (1.28)$$

entonces, la **exponencial estocástica**, también conocida como la **exponencial de Doléans** de  $U^\lambda$  viene dada por la fórmula:

$$\mathcal{E}_t(U^\lambda) := \exp \left( \int_0^t \lambda_u \cdot dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_u|^2 du \right), \quad t \in [0, T] \quad (1.29)$$

**Observación 1.5.2.** Si se tiene que  $E(\mathcal{E}_T(U^\lambda)) = E(\mathcal{E}_0(U^\lambda)) = 1$ , para todo  $t \in [0, T]$ , entonces  $\mathcal{E}(U^\lambda)$  es una  $\mathcal{F}$ -martingala continua estrictamente positiva<sup>11</sup>.

**Lema 1.5.1.** Si existe una constante  $C$  tal que

$$\int_0^T |\lambda_t|^2 dt \leq C \text{ c.s.}$$

entonces  $\mathcal{E}(U^\lambda)$  es una martingala tal que

$$E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} (\mathcal{E}(U^\lambda))^2 \right) < \infty.$$

*Demostración.* La demostración puede ser consultada en Pascucci [54] Lema 10.1. □

**Definición 1.5.2.** Sean  $\mu, \vartheta$  dos medidas en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . La densidad de Radon-Nikodym de  $\vartheta$  con respecto a  $\mu$  se define como la única variable aleatoria  $\mathcal{F}$ -medible  $\eta$  tal que se tiene, para cualquier evento  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\frac{d\vartheta}{d\mu} = \eta_T \quad (1.30)$$

esto es

$$\vartheta(A) = \int_A \eta_T(\omega) d\mu(\omega) \quad (1.31)$$

**Proposición 1.5.1.** Si se asume que  $\mathcal{F}$  es la filtración estándar de  $W$ , entonces para cualquier medida de probabilidad  $\vartheta$  en  $(\Omega, \mathcal{F})$  equivalente a  $\mu$ , existe un proceso en  $\mathbb{R}^d$  progresivamente medible  $\gamma$  tal que la densidad de Radon-Nikodym de  $\vartheta$  con respecto a  $\mu$  es igual a

$$\frac{d\vartheta}{d\mu} = \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \gamma_u \cdot dW_u \right), \quad \mu - \text{casi siempre.} \quad (1.32)$$

---

<sup>11</sup>De acuerdo con el lema (1.3.1), cuando  $W$  es un movimiento browniano estándar unidimensional y  $\lambda$  es un número real, se tiene que  $\mathcal{E}(U^\lambda)$  es una martingala respecto a la filtración estándar  $\mathcal{F}^W$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Musiela *et al* [51] proposición A.15.3.  $\square$

**Lema 1.5.2.** Si  $\mu$  y  $\vartheta$  son dos medidas de probabilidad equivalentes definidas en el espacio mediable  $(\Omega, \mathcal{F})$  y se asume que  $\mathcal{E}(U^\lambda)$  es una  $\mu$ -martingala y que la medida de probabilidad  $\vartheta$  viene dada por (1.32). Entonces un proceso  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  es una  $\vartheta$ -martingala, si y sólo si,  $(M_t \mathcal{E}_t(U^\lambda))_{t \in [0, T]}$  es una  $\mu$ -martingala.

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Pascucci Lema 10.3  $\square$

A continuación se establece el teorema de Girsanov unidimensional, el cual es la pieza fundamental para la descripción de la metodología de valoración neutral al riesgo en el modelo de Black-Scholes.

**Teorema 1.5.1** (Teorema de Girsanov Unidimensional.). *Sea  $W$  un movimiento browniano estándar unidimensional definido en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}, P)$ . Para un número real  $\gamma$ , se define el proceso  $\tilde{W}_t$  tomando  $\tilde{W}_t = W_t - \gamma t$  para  $t \in [0, T]$ . Sea la medida de probabilidad  $Q$  equivalente a  $P$  en  $(\Omega, \mathcal{F})$ , definida por medio de*

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left( \gamma W_T - \frac{1}{2} \gamma^2 T \right) = \eta_T^\gamma, \quad P - \text{casi siempre.}$$

*Entonces  $\tilde{W}_t$  es un movimiento browniano estándar en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}, Q)$ .*

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Musiela *et al* [51] Proposición A.15.1 o Shreve [58] Teorema 5.2.3.  $\square$

Finalmente, se definirá el Teorema de Girsanov multidimensional, el cual será de utilidad cuando se valoren opciones bajo el supuesto de volatilidad estocástica en el último capítulo de este documento, caso en el cual se trabajará con un movimiento browniano bi-dimensional.

**Teorema 1.5.2.** *Sea  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  un movimiento browniano estándar  $d$ -dimensional en el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}, P)$ . Suponga que  $\gamma$  es un proceso en  $\mathbb{R}^d$  progresivamente medible tal que  $\mathcal{E}(U^\gamma)$  es una  $P$ -martingala. Si se define una medida de probabilidad  $Q$  en  $(\Omega, \mathcal{F})$ , equivalente a  $P$  dada por la derivada de Radon-Nikodym*

$$\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \gamma_u \cdot dW_u \right), \quad P - \text{casi siempre} \quad (1.33)$$

*entonces el proceso  $\hat{W}$  dado por la fórmula*

$$\hat{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma_u du, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.34)$$

es un movimiento browniano estándar  $d$ -dimensional en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}^W)_{t \geq 0}, Q)$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Korn [38] Teorema 3.11 y Pascucci [54] Teorema 10.5.  $\square$

El principal supuesto del Teorema de Girsanov es la propiedad de martingala del proceso  $\mathcal{E}(U^\gamma)$ , por tanto con el fin de poder aplicar dicho teorema para un proceso en particular, se necesita poder verificar que se cumple la condición de martingala. La proposición a continuación es una condición suficiente para ésto y en general se conoce como la *condición de Novikov*.

**Proposición 1.5.2.** *Si  $\gamma$  es tal que bajo la medida de probabilidad  $P$*

$$E \left\{ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T |\gamma_u|^2 du \right) \right\} < \infty \quad (1.35)$$

*entonces  $\mathcal{E}(U^\gamma)$  es una martingala estrictamente positiva.*

## CAPÍTULO 2

---

### Modelo de Valoración de Opciones Estándar

---

En este capítulo se describirán los principales conceptos financieros necesarios para la valoración de opciones. En primer lugar, se describirá el modelo de valoración en tiempo continuo propuesto por Black-Scholes [6] en 1973, utilizando la metodología de valoración neutral al riesgo. En segundo lugar, se describirán las modificaciones a dicho modelo para el caso en el que el activo subyacente es una tasa de cambio. Finalmente, se mostrarán algunos resultados numéricos utilizando datos de la tasa de cambio peso/dólar (COP/USD).

#### 2.1. Generalidades

Con el fin de describir adecuadamente la metodología de valoración de opciones, en primer lugar, se realizará una breve descripción del tipo de activos que se busca valorar.

Este documento se centrará en un derivado especial, conocido como **opciones**. Una opción *de compra* (*Call*) estándar, le da a su poseedor el derecho (más no la obligación) de comprar en el futuro, al suscriptor, un activo del mercado  $S$  conocido como activo subyacente<sup>1</sup> a un precio determinado. Si este derecho se restringe a un único momento del tiempo  $T$  establecido en el futuro, se conoce como *europaea*. El precio determinado para la compra se conoce como *precio de ejercicio* (*strike*) y se denota por  $K$ , y el momento  $T$  establecido en el futuro se conoce como

---

<sup>1</sup>Los activos subyacentes pueden ser acciones, tasas de cambio, materias primas, entre otros activos. La principal característica que comparten es que el valor futuro de los mismos no se conoce de manera anticipada y por tanto éstos se conocen como activos riesgosos, en la medida en que su valor futuro es incierto.

*fecha de vencimiento o maduración de la opción.*

El opuesto a una opción *de compra* europea estándar es una opción *de venta* (*put*) europea estándar, la cual, le da a su poseedor el derecho (más no la obligación) de vender al suscriptor un activo riesgoso del mercado a un precio determinado en un momento del tiempo  $T$  establecido en el futuro.

El valor que tomen estas opciones en el momento  $T$ , denotado como  $C_T$  para el caso de las opciones *de compra* europeas o  $P_T$  para el caso de las opciones *de venta* europeas, depende del precio que tome el activo subyacente en la fecha de vencimiento  $S_T$  y del *precio de ejercicio*  $K$  preestablecido. En el momento  $T$ , si  $S_T > K$  el poseedor de una opción *de compra* europea, podrá adquirir el activo por  $K$  y luego venderlo en el mercado por  $S_T$ , con lo cual obtendrá una ganancia de  $S_T - K$ . En otro caso, no obtendrá ninguna ganancia y por tanto no ejercerá el derecho que le otorga tener la opción. A partir de lo anterior, el *valor* de una opción *de compra* europea en la *fecha de vencimiento* está dado por:

$$C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+ \quad (2.1)$$

En el caso de las opciones *de venta* europeas, si en el vencimiento  $K > S_T$  entonces el poseedor de la opción podrá comprar el activo en el mercado por  $S_T$  y luego venderlo al suscriptor de la opción por  $K$ , obteniendo una ganancia de  $K - S_T$ . En otro caso, no obtendrá ninguna ganancia y por tanto no ejercerá la opción. Siguiendo este argumento, el *valor* de una opción *de venta* europea en la *fecha de vencimiento* está dado por:

$$P_T = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+ \quad (2.2)$$

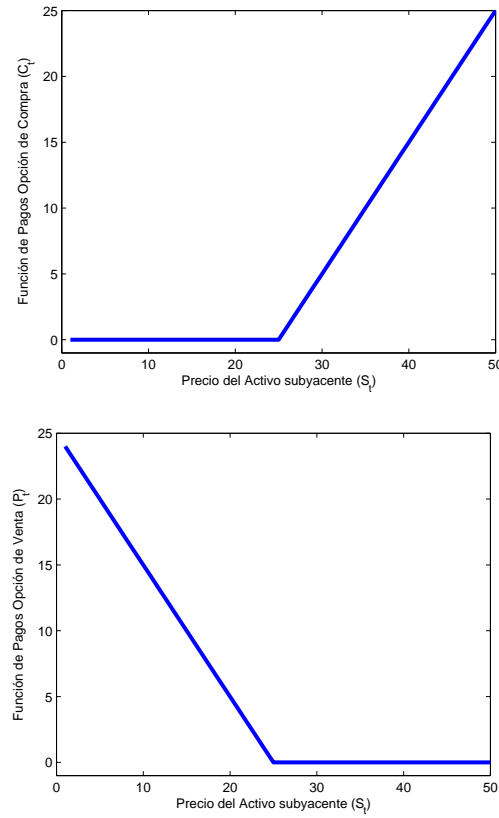


FIGURA 2.1. Función de Pagos de una opción de Compra y una de venta con precio de ejercicio  $K=25$

**Observación 2.1.1.**  $C_T$  y  $P_T$  son el beneficio (*payoff*) final que ofrece el derivado. Ambas son *v.a*  $\mathcal{F}_T$ -medibles en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Por simplicidad denotaremos este beneficio final por  $H$ , donde

$$H = f(S_T)$$

donde  $f(\cdot)$  viene dada por  $f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$  para las opciones de compra estándar y por  $f(S_T) = \max(K - S_T, 0)$  para las opciones de venta estándar. La condición de  $\mathcal{F}_T$ -medibilidad describe el hecho de que  $H$  depende del proceso que rige el precio del activo subyacente  $S$ .

Los dos principales problemas que se estudian para un derivado con beneficio final  $H$  son:

1. El problema de la *valoración*, es decir, determinar el precio justo que debe pagar un inversionista en el momento inicial para tener el derecho que le da la opción en el tiempo  $T$ .
2. El problema de la *replicación*, es decir, determinar una estrategia o un portafolio que le permita replicar los pagos que le genera la opción.

En este trabajo nos centraremos en el problema de la valoración utilizando como base el modelo propuesto por Black-Scholes en 1973, el cual se describe a continuación.

## 2.2. Modelo de Black-Scholes

En esta sección se describirá el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes, descrito desde la metodología de valoración neutral al riesgo, la cual fue inicialmente propuesta por Cox y Ross [15] en 1976 y por Davis Kreps, Michael Harrison y Stan Pliska [29, 30] en 1979 y 1981 respectivamente.

El modelo de Black-Scholes ha sido uno de los trabajos más reconocidos en el campo de las finanzas, ya que marcó un hito importante en el modelamiento de los activos financieros y estableció fórmulas exactas para la valoración de opciones europeas estándar. En línea con lo propuesto por Samuelson [57] en 1965, Black y Scholes asumen que el precio de los activos financieros se comporta como un movimiento browniano geométrico. Adicional a esto, se supone que la volatilidad de dichos activos es constante durante la vigencia de la opción.

En esta sección se establecerá el precio justo de una opción europea estándar utilizando el método de valoración neutral al riesgo, bajo el cual se requiere realizar un cambio de medida de  $P$  en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$  a una medida  $Q$ , donde ésta última corresponde a la medida equivalente martingala, dada por el Teorema de Girsanov.

### 2.2.1. Generalidades

En primer lugar, se tiene un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$  equipado con la filtración estándar del movimiento browniano  $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$ , la cual se define como en (1.6) y satisface las condiciones usuales<sup>2</sup>. Además se tiene un movimiento browniano  $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$  sobre este espacio y las constantes reales  $r, \mu, \sigma > 0$ , donde  $r$  corresponde a la tasa de interés libre de riesgo<sup>3</sup>,  $\mu$  es la tasa media de retorno (rendimiento) del activo riesgoso y  $\sigma$  es la volatilidad asociada a dicho activo.

Adicionalmente se supone un *mercado perfecto*, en el cual, las transacciones se desarrollan continuamente, está permitido prestar y pedir prestado sin límite a la misma tasa de interés constante, no existen costos de transacción ni impuestos y

---

<sup>2</sup>Ver Definición (1.1.10)

<sup>3</sup>La cual puede homologarse a la tasa que rinde una cuenta de ahorros.

están permitidas las ventas en corto<sup>4</sup>

Se comenzará describiendo el proceso que modela los dos activos principales de esta economía, un activo libre de riesgo (una cuenta de ahorros) y un activo riesgoso.

Se supone que el precio del activo sin riesgo o bono viene dado por:

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

donde se tiene que  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo. El valor inicial  $B_0$  es una constante positiva y sin pérdida de generalidad, se supondrá que  $B_0 = 1$  y por tanto  $B_t = e^{rt}$ .

En el modelo de Black-Scholes se asume un único activo riesgoso cuyo precio  $S_t$  en el tiempo  $t$ , con  $t \in [0, T]$  es modelado por un movimiento browniano geométrico. Por tanto, la evolución en el tiempo del precio del activo riesgoso  $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$  se describe por medio de la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.4)$$

donde  $S_0$  es el valor inicial del activo riesgoso y es una constante positiva,  $\mu \in \mathbb{R}$  es la tasa media de retorno o ganancia del activo riesgoso y  $\sigma > 0$  es la volatilidad constante asociada al mismo.

**Proposición 2.2.1.** *La solución de la ecuación (2.4) es el movimiento browniano geométrico<sup>5</sup>:*

$$S_t = S_0 \exp \left( \sigma W_t + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

*Demostración.* Para la prueba es suficiente con utilizar el lema de Itô para comprobar que la ecuación (2.5) satisface la EDE dada en (2.4). Para esto se introducirá un proceso auxiliar  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  dado por:

$$X_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t$$

con  $X_0 = 0$ . Entonces el proceso  $S$  dado por (2.5) satisface  $S_t = g(X_t)$  para  $t \in [0, T]$ , donde la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $g(x) = S_0 e^x$ . Se sabe que  $g(x) = g'(x) =$

<sup>4</sup>Las ventas en corto son transacciones en las que un individuo vende un activo que le ha sido prestado por otro inversionista o que no posee.

<sup>5</sup>Las principales propiedades de este proceso fueron descritas en la sección (1.3.1).



$g''(x)$  y por tanto al aplicar la fórmula de Itô se tiene:

$$\begin{aligned} dS_t &= dg(X_t) = g'(X_t) \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + g'(X_t)\sigma dW_t + \frac{1}{2}g''(X_t)\sigma^2 dt \\ &= g(X_t)(\mu dt + \sigma dW_t) = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Con lo cual queda demostrada la proposición (2.2.1).  $\square$

**Corolario 2.2.1.** El precio del activo subyacente  $S$  es una  $\mathcal{F}^W$ -martingala bajo la medida de probabilidad  $P$ , si y sólo si, su tasa de rendimiento es  $\mu = 0$ .

*Demostración.* Para esto es suficiente con observar que  $S$  puede ser escrito como

$$S_t = e^{\mu t} M_t^\lambda$$

donde  $M_t^\lambda$  está definida como en (1.13) con  $\lambda = \sigma$ . Entonces se tiene que para todo  $u \leq t \leq T$ ,

$$E_P(S_t | \mathcal{F}_u) = E_P(e^{\mu t} M_t^\lambda | \mathcal{F}_u) = e^{\mu t} M_u^\lambda = S_u e^{\mu(t-u)}$$

Luego  $S_t$  será una  $\mathcal{F}^W$ -martingala, si y sólo si,  $\mu = 0$ .  $\square$

Finalmente se introducirá el concepto de *precio descontado*<sup>6</sup> del activo riesgoso.

**Definición 2.2.1.** El precio descontado del activo riesgoso  $S$  se define como

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = e^{-rt} S_t$$

**Observación 2.2.1.** De acuerdo con la ecuación (2.4) y la definición (2.2.1), se tiene para todo  $t \in [0, T]$  que

$$S_t^* = S_0^* e^{(\sigma W_t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t)}$$

y de manera equivalente a  $S$ , el proceso  $S^*$  es la solución a la EDE

$$dS_t^* = (\mu - r)S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t, \quad S_0^* = S_0 \quad (2.7)$$

La condición de martingala de  $S^*$  bajo la medida de probabilidad  $P$  viene dada por el corolario a continuación:

**Corolario 2.2.2.** El precio descontado del activo riesgoso  $S^*$  es una martingala bajo la medida de probabilidad  $P$  con respecto a la filtración  $\mathcal{F}^W$ , si y sólo si,  $\mu = r$ .

---

<sup>6</sup>Descontar el precio significa traer a valor presente los valores futuros que éste pueda tomar en cualquier  $t \in [0, T]$ . se sabe que el precio descontado para  $t = 0$  es igual al precio sin descontar.

*Demostración.* La demostración del corolario (2.2.2) sigue las mismas líneas de la demostración del corolario (2.2.1).  $\square$

Una vez descritas las características generales de la economía de Black-Scholes y de los activos existentes en ella, se procederá a describir de forma general la metodología de valoración neutral al riesgo, la cual, como se mencionó en la introducción de este capítulo, consiste en realizar un cambio de medida de  $P$  (probabilidades reales) a  $Q$  (probabilidades neutrales) con el fin de valorar las opciones bajo esta nueva medida de probabilidad. En particular, bajo la medida  $Q$  el precio descontado del activo riesgoso  $S^*$  es una  $Q$ -martingala. Los conceptos necesarios para establecer la medida de probabilidad  $Q$  son el objetivo de la siguiente sección.

### 2.2.2. Medida Martingala

**Definición 2.2.2.** Una medida de probabilidad  $Q$  en  $(\Omega, \mathcal{F}^W)$ , equivalente a  $P$ , se llama **medida martingala** para  $S^*$ , si  $S^*$  es una martingala bajo  $Q$ .

En el modelo de Black-Scholes la medida martingala, dada por la definición (2.2.2) para el precio descontado del activo riesgoso, es única y se conoce explícitamente tal y como se muestra en el lema a continuación:

**Lema 2.2.1.** (i) La única medida martingala  $Q$  para el proceso del precio descontado del activo riesgoso  $S^*$  viene dada por la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left( \frac{r - \mu}{\sigma} W_t - \frac{1}{2} \frac{(r - \mu)^2}{\sigma^2} t \right), \quad P - \text{casi siempre.}$$

(ii) El precio descontado del activo riesgoso  $S^*$  satisface, bajo la medida martingala  $Q$ ,

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^* \quad (2.8)$$

donde el proceso continuo,  $\mathcal{F}^W$ -adaptado  $W^*$  está dado por la fórmula

$$W_t^* = W_t - \frac{r - \mu}{\sigma} t, \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

y es un movimiento browniano estándar en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}^W, Q)$ .

*Demostración.* En primer lugar, es necesario recordar que  $\mathcal{F}^W$  está definida como en la observación (1.3.1), es decir, es la  $P$ -extensión de la filtración natural de  $W$ . Entonces, de acuerdo con la proposición (1.5.1) se sabe que para cualquier medida de probabilidad  $Q$  en  $(\Omega, \mathcal{F}^W)$  equivalente a  $P$  y para un movimiento browniano

unidimensional  $W$  existe un proceso  $\gamma$  progresivamente medible respecto a la filtración  $\mathcal{F}^W$  tal que la derivada de Radon-Nikodym de  $Q$  con respecto a  $P$  es igual a

$$\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}_t \left( \gamma W_T - \frac{\gamma^2}{2} T \right) \quad P - \text{casi siempre.} \quad (2.9)$$

Adicionalmente, si  $\gamma$  en (2.9) es una martingala, entonces por el teorema de Girsanov (1.5.1) se sabe que el proceso

$$W_t^* = W_t - \gamma t \quad \forall t \in [0, T]$$

es un movimiento browniano estándar en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ .

Con el fin de identificar el proceso  $\gamma$  hasta el momento desconocido, se reemplaza  $dW_t = dW_t^* + \gamma_t dt$  en la ecuación (2.7), de donde se tiene la siguiente EDE<sup>7</sup>:

$$dS_t^* = (\mu - r + \gamma_t \sigma) S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t^*, \quad S_0^* = S_0 \quad (2.10)$$

Para que el proceso  $S^*$  sea una martingala bajo  $Q$  se requiere que el proceso  $dS_t^*$  no tenga tendencia, esto implica que en la ecuación (2.10)

$$(\mu - r + \gamma_t \sigma) = 0$$

de donde

$$\gamma_t = \frac{r - \mu}{\sigma} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

De acuerdo con lo anterior se tiene que la medida martingala  $Q$  viene dada por

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left( \frac{r - \mu}{\sigma} W_T^* - \frac{1}{2} \frac{(r - \mu)^2}{\sigma^2} T \right), \quad P - \text{casi siempre.}$$

y bajo dicha medida

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^*$$

y

$$S_t^* = S_0^* \exp \left( \sigma W_t^* - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \quad (2.12)$$

Adicionalmente,  $\gamma$  definido como en (2.11) cumple con la condición de novikov dada en la proposición (1.5.2) y por tanto a partir del teorema de Girsanov se tiene que  $W^*$  dado por

$$W_t^* = W_t - \frac{r - \mu}{\sigma} t, \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

es un movimiento browniano estándar, con lo cual queda probado el lema.  $\square$

<sup>7</sup> $S^*$  satisface esta EDE bajo la medida de probabilidad  $Q$ .

A continuación, se enunciarán dos proposiciones<sup>8</sup> importantes para la valoración de opciones mediante la metodología de valoración neutral al riesgo. Para entender adecuadamente las proposiciones que se enuncian a continuación, resulta necesario introducir el concepto de arbitraje, el cual será definido en la sección a continuación.

**Proposición 2.2.2.** *Si el sistema de precios  $(B, S)$  no permite oportunidades de arbitraje, existe una probabilidad  $Q$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}^W)$  equivalente a  $P$ , para la cual el precio descontado del activo con riesgo  $S^*$  es una martingala.*

**Proposición 2.2.3.** *Si la probabilidad equivalente  $Q$  bajo la cual  $S^*$  es una martingala, es única, entonces todo activo derivado tiene un único precio compatible con el sistema de precios  $(B, S)$ . En este caso,  $Q$  se llama la única medida martingala equivalente (MME) y el mercado se dice completo.*

### 2.2.3. Ausencia de Arbitraje

El concepto de arbitraje es de gran importancia para la teoría financiera, en particular en la teoría de valoración de opciones. Por la palabra arbitraje se entienden aquellas posibilidades existentes en un mercado de generar una ganancia futura cierta (con probabilidad 1) sin asumir ningún riesgo en el presente, o lo que es lo mismo, sin haber realizado ninguna inversión. A continuación se definirá formalmente el concepto de arbitraje, para lo cual resulta necesario introducir el concepto de estrategia.

**Definición 2.2.3.** Una estrategia es un par  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  de procesos estocásticos en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ , progresivamente medibles respecto a la filtración  $\mathcal{F}^W$

**Definición 2.2.4.** Se dice que una estrategia  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  es *autofinanciada* en el intervalo  $[0, T]$  si el proceso de riqueza  $V(\phi)$  definido como

$$V_t(\phi) := \phi_t^0 B_t + \phi_t^1 S_t, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.13)$$

satisface la siguiente condición:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^0 dB_u + \int_0^t \phi_u^1 dS_u, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.14)$$

donde la primera integral se entiende en el sentido de la integral de Riemann y la segunda en el sentido de la integral de Itô.

**Observación 2.2.2.** Se notará por  $\Phi$  la clase de todas las estrategias autofinanciadas. Adicionalmente, se notará por  $\mathcal{M}(S, \Phi)$  el mercado actual en la economía de Black-Scholes.

---

<sup>8</sup>Estas proposiciones y sus pruebas se encuentran en Cox y Huang (1986) [14], Harrison y Kreps (1979) [29] y Harrison y Pliska (1981) [30]

Una vez definidas las estrategias autofinanciadas de la economía de Black-Scholes, es posible definir formalmente el concepto de arbitraje.

**Definición 2.2.5.** Una estrategia  $\phi \in \Phi$  se llama *oportunidad de arbitraje* si  $V_0(\phi) = 0$  y la riqueza final de  $\phi$ ,  $V_T(\phi)$ , satisface:

$$P(V_T(\phi) \geq 0) = 1 \quad \text{y} \quad P(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

**Observación 2.2.3.** Se dice que el mercado  $\mathcal{M}(S, \Phi)$  se encuentra *libre de arbitraje* si no existen oportunidades de arbitraje en la clase  $\Phi$  de todas las estrategias autofinanciadas.

**Definición 2.2.6.** Una estrategia  $\phi \in \Phi$  se dice  $Q$ -admisibles si el proceso de riqueza descontado

$$V_t^*(\phi) = B_t^{-1}V_t(\phi), \quad \forall t \in [0, T]$$

es una martingala bajo  $Q$ .

**Observación 2.2.4.** Se denotará por  $\Phi(Q)$  la clase de todas las estrategias  $Q$ -admisibles. La tripleta  $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(Q))$  se conoce como el modelo de arbitraje de Black-Scholes o en general como el modelo de Black-Scholes.

Una vez definidas las condiciones para la no existencia de oportunidades de arbitraje en la economía de Black-Scholes y la definición de la medida martingala  $Q$ , es posible proceder a la valoración de opciones en el modelo de Black-Scholes.

## 2.2.4. Valoración de Opciones

Una vez se ha determinado la medida de probabilidad con la que resulta conveniente trabajar, es posible valorar una opción estándar en el modelo de Black-Scholes. Para esto, se considera un derivado de tipo europeo  $X$ , cuya fecha de vencimiento es  $t = T$ , entonces se tiene que:

**Definición 2.2.7.** Se dice que  $X$  es replicable, si existe al menos una estrategia admisible  $\phi$  que lo replica, es decir, tal que  $V_T(\phi) = X$ .

**Definición 2.2.8.** Sea  $X$  un derivado de tipo europeo replicable con fecha de vencimiento  $T$ . Entonces, el precio de arbitraje en el modelo de Black-Scholes  $\mathcal{M}_{BS}$ , denotado por  $\pi_t(X)$ ,  $t \in [0, T]$ , se define como el proceso de riqueza  $V_t(\phi)$ ,  $t \in [0, T]$ , de una estrategia admisible  $\phi$  que replica a  $X$ , esto es, que satisface la igualdad  $V_T(\phi) = X$ .

Se debe notar que si no existe una estrategia admisible  $\phi$  el precio de arbitraje del derivado  $X$  no está definido en esta economía.

**Corolario 2.2.3.** Sea  $X$  un derivado de tipo europeo replicable con fecha de vencimiento  $T$ . Entonces el precio de arbitraje  $\pi_t(X)$  en el momento  $t \in [0, T]$  en  $\mathcal{M}_{BS}$  viene dado por la fórmula de valoración neutral al riesgo

$$\pi_t(X) = B_t E_Q(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.15)$$

*Demostración.* Sea  $\phi$  una estrategia admisible que replica a  $X$ . Entonces se tiene por la definición (2.2.8) que

$$\pi_t(X) = V_t(\phi)$$

pero por la definición del proceso de riqueza descontado  $V_t^*(\phi)$ , se sabe que  $V_t(\phi) = B_t V_t^*(\phi)$ . Además, dado que  $\phi$  es una estrategia admisible, se sabe que el proceso  $V_t^*(\phi)$  es una  $Q$ -martingala, por tanto

$$V_t^*(\phi) = E_Q(V_T^*(\phi) | \mathcal{F}_t)$$

de donde se tiene que

$$\pi_t(X) = B_t E_Q(V_T^*(\phi) | \mathcal{F}_t) = B_t E_Q(B_T^{-1} V_T(\phi) | \mathcal{F}_t)$$

Finalmente, dado que  $\phi$  es una estrategia que replica a  $X$ , se sabe que  $V_T(\phi) = X$ . Por tanto se tiene el resultado deseado:

$$\pi_t(X) = B_t E_Q(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$$

□

Una vez se cuenta con la fórmula de valoración de opciones neutral al riesgo, dada por (2.15), se busca encontrar el precio justo que debe pagar un inversionista por una opción europea de compra  $C$  cuyo pago en la fecha de vencimiento  $T$  viene dado por  $C_T = (S_T - K)^+$ , donde  $K$  es el precio de ejercicio fijado al comienzo del contrato. Con este objetivo, en primer lugar se debe verificar que el derivado  $C$  es replicable en el modelo de Black-Scholes.

Para esto, se debe encontrar una estrategia  $\phi$  admisible que replique al derivado  $C$ . Dado que  $\phi$  debe ser admisible, se debe cumplir que el proceso descontado  $V_t^*(\phi)$  sea una martingala bajo la medida de probabilidad equivalente  $Q$ . Como  $Q$  se encuentra definida en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}^W)$  entonces  $V_t^*(\phi)$  es una martingala browniana.

De acuerdo con el teorema de representación de martingalas (1.4.6) existe un

proceso  $\psi$  tal que la integral estocástica

$$V_t^* = V_0^* + \int_0^t \psi_u dW_u^*, \quad \forall t \in [0, T]$$

es una martingala continua bajo la medida de probabilidad  $Q$ .

Teniendo en cuenta que

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^*$$

$V_t^*$  puede reescribirse como:

$$V_t^* = V_0^* + \int_0^t h_u dS_u^*, \quad \forall t \in [0, T]^9$$

con  $h_t = \frac{\psi_t}{\sigma S_t^*}$ .

A partir de lo anterior se considera la estrategia

$$\phi_t^0 = h_t, \quad \phi_t^1 = V_t^* - h_t S_t^* = B_t^{-1}(V_t - h_t S_t)$$

para la cual se debe verificar la propiedad de autofinanciamiento. Para esto, se requiere que

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t + \phi_t^1 dB_t$$

lo cual se tiene, ya que<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= d(B_t V_t^*(\phi)) = B_t dV_t^*(\phi) + V_t^*(\phi) dB_t \\ &= B_t dV_t^*(\phi) + r V_t^*(\phi) B_t dt \\ &= B_t h_t dS_t^* + r V_t dt = B_t h_t (B_t^{-1} dS_t - r B_t^{-1} S_t dt) + r V_t dt \\ &= h_t dS_t + r(V_t - h_t S_t) dt = \phi_t^0 dS_t + \phi_t^1 dB_t \end{aligned}$$

Por tanto,  $\phi$  es una estrategia admisible que replica a  $C$  y en consecuencia la opción de compra es un derivado replicable en el modelo de Black-Scholes  $\mathcal{M}_{BS}$ .

A continuación, es posible utilizar la fórmula de valoración neutral para encontrar el precio de arbitraje del derivado  $C$  en el momento  $t = 0$ . Dado que el precio descontado de la opción es una martingala bajo la medida de probabilidad equivalente  $Q$ , entonces se sabe que

$$E^Q[\exp(-rT)C_T | \mathcal{F}_t] = \exp(-rt)C_t \Rightarrow$$

<sup>9</sup>Puede demostrarse que  $V_t^*$  es solución a la EDE  $dV_t^* = d(V_t B_t^{-1})$ , donde  $h_u = \phi_u^0$ .

<sup>10</sup>Se debe recordar que  $dB_t = rB_t dt$  por definición del activo libre de riesgo.

$$E^Q [\exp(-r[T-t])C_T | \mathcal{F}_t] = C_t \quad (2.16)$$

Como  $C_T = (S_T - K)^+$ , se tiene

$$C_t = E^Q [\exp(-r[T-t])(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \quad (2.17)$$

Dado que bajo la medida de probabilidad equivalente  $Q$ ,  $S_T$  viene dado por

$$S_T = S_t \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*)\right)$$

donde  $W_t^*$  es un movimiento browniano estándar bajo la medida de probabilidad neutral  $Q$  y por tanto los incrementos  $W_T^* - W_t^*$  son independientes de la filtración  $(\mathcal{F}_t)$ . Además dichos incrementos cuentan con una distribución

$$W_T^* - W_t^* \sim N(0, T-t).$$

Entonces se tiene que:

$$C_t = E^Q [\exp(-r[T-t])(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = E^Q [\exp(-r[T-t])(S_T - K)^+]$$

y para  $t = 0$  se tiene

$$C_0 = E^Q (e^{-rT}S_T - e^{-rT}K)^+ \quad (2.18)$$

observe que  $e^{-rT}S_T = S_T^*$  y de acuerdo con (2.12) se sabe que

$$S_T^* = S_0^* \exp\left(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

donde  $W_T^* \sim N(0, T)$ . Si se define una variable auxiliar

$$y\sqrt{T} := W_T^* \quad (2.19)$$

se sabe que  $y \sim N(0, 1)$ . Al introducir (2.19) en (2.18) se tiene que:

$$C_0 = E^Q (S_T^* - e^{-rT}K)^+ = E^Q \left( S_0 \exp\left(\sigma y\sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - e^{-rT}K \right)^+$$

de donde

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \left( S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}y\right) - K \exp(-rT) \right)^+ dy$$

Por simetría de la distribución normal se tiene

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \left( S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\sqrt{T}y\right) - K \exp(-rT) \right)^+ dy$$



Dado que los inversionistas únicamente ejercerán el derecho que da la opción cuando  $S_T > K$ , se tiene que la cantidad  $\left(S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\sqrt{T}y\right) - K \exp(-rT)\right)^+$  se anula si

$$S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\sqrt{T}y\right) \leq K \exp(-rT)$$

$$\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\sqrt{T}y \leq -rT,$$

lo que implica que

$$y \geq \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} := d_-$$

y que

$$d_+ := \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_- + \sigma\sqrt{T}.$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \left(S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T - \sigma\sqrt{T}y\right) - K \exp(-rT)\right) dy \\ &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \exp\left(-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{T})^2\right) - K \exp(-rT) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= S_0 \Phi(d_+) - K \exp(-rT) \Phi(d_-) \end{aligned} \quad (2.20)$$

la cual, es la conocida fórmula de valoración de opciones de Black- Scholes.

## 2.3. Valoración de opciones sobre tasas de cambio

De acuerdo con Xiao [63] una de las grandes innovaciones financieras desarrolladas durante el siglo XX en los mercados de derivados, fueron las opciones sobre tasas de cambio y su compra y venta desde 1982 en la Bolsa de Valores de Philadelphia (PHLX)<sup>11</sup>. Para 1988 este tipo de opciones se comerciaban en volúmenes de cuatro millones de dólares diarios en términos del valor del subyacente. Actualmente, las principales bolsas de valores del mundo ofrecen opciones sobre las principales tasas de cambio: dólares (USD), dólares australianos (AUD), libras esterlinas (GBP), dólares canadienses (CAD), euros (EUR), Yen japonés (JPY), Franco suizo (CHF) y dólares neozelandeses (NZD), donde el principal atractivo de estas opciones es que permiten cubrirse frente a las variaciones futuras de la tasa de cambio.

<sup>11</sup> La Philadelphia Stock Exchange (PHLX), ahora se conoce como la NASDAQ OMX PHLX y es la bolsa de valores más antigua en Estados Unidos, fundada en 1790.

En esta medida, resulta importante contar con modelos de valoración de opciones que tengan en cuenta las particularidades de las tasas de cambio. Al respecto, el precio de las opciones sobre tasas de cambio puede verse influenciado por el valor de la tasa de cambio en sí misma (activo subyacente), las tasas de interés domésticas y extranjeras y la volatilidad esperada tanto del activo subyacente como de las tasas de interés.

Uno de los primeros modelos propuestos para valorar opciones sobre tasas de cambio fue el propuesto por Garman y Kohlhagen (1983)[24], el cual, utiliza los mismos principios del modelo propuesto por Merton en (1973), realizando una homologación entre los dividendos que paga una opción y la tasa de interés libre de riesgo del país extranjero. Mediante este modelo, se busca valorar un contrato que le da al poseedor el derecho a comprar  $M$  unidades de una divisa a una tasa de cambio específica  $K$  en una fecha  $T$ . Por ejemplo, tener el derecho a comprar 100 dólares a una tasa de cambio fija de 1.800 pesos dentro de un año. Este modelo se describe a continuación.

En primer lugar, todos los procesos considerados a continuación se encuentran definidos en un espacio de probabilidad filtrado común  $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ , donde la filtración  $\mathcal{F}^W$  es la filtración estándar del movimiento browniano unidimensional  $W$ . Las tasas de interés doméstica (local) y extranjera  $r^d$  y  $r^f$  se asumen como valores reales dados. Adicionalmente y a diferencia del modelo expuesto en la sección anterior, este mercado cuenta con tres activos, una cuenta de ahorros o un activo libre de riesgo en la moneda local  $B^d$ , una cuenta de ahorros o un activo libre de riesgo en la moneda extranjera  $B^f$  y la tasa de cambio o activo riesgoso  $Z$ <sup>12</sup>

Las cuentas de ahorros local y extranjera vienen dadas por:

$$B_t^d = e^{(r^d t)} \quad B_t^f = e^{(r^f t)} \quad \forall t \in [0, T]$$

Adicionalmente, se tiene que  $B_t^d$  y  $B_t^f$  se encuentran expresadas en unidades de la moneda local y extranjera respectivamente. Por su parte, la tasa de cambio  $Z$  que representa el precio en unidades de moneda doméstica en el momento  $t$  de una unidad de moneda extranjera<sup>13</sup>, se encuentra gobernada, bajo la medida de probabilidad  $P$ , por la EDE:

$$dZ_t = Z_t(\mu_Z dt + \sigma_Z dW_t); \quad Z_0 > 0, \quad (2.21)$$

<sup>12</sup>En la literatura financiera es común notar a las tasas de cambio por la letra  $Q$ , sin embargo, con el fin de no generar confusiones entre la tasa de cambio y la medida martingala se notará a la primera por  $Z$ .

<sup>13</sup>En el caso particular de la tasa de cambio peso/dólar, se tiene por ejemplo, que un dólar vale 1800 pesos.

donde  $\mu_Z \in \mathbb{R}$  es el coeficiente de tendencia y  $\sigma_Z$  denota la volatilidad constante de  $Z$ .

Siguiendo la misma lógica de valoración descrita en la sección anterior, en primer lugar se debe definir la medida martingala bajo la cual es válida la fórmula de valoración neutral.

### 2.3.1. Medida Martingala

De acuerdo con la ecuación (2.21), la tasa de cambio en el tiempo  $t$  viene dada por

$$Z_t = Z_0 e^{((\mu_Z - \frac{1}{2}\sigma_Z^2)t + \sigma_Z W_t)}.$$

Si se introduce un proceso auxiliar  $Z_t^*$  definido como

$$Z_t^* := \frac{B_t^f Z_t}{B_t^d} = e^{(r^f - r^d)t} Z_t \quad (2.22)$$

el cual, representa el valor en el tiempo  $t$  del activo libre de riesgo extranjero expresado en unidades de moneda local y descontado en el mercado local por medio del activo libre de riesgo  $B_t^d$ . Resulta útil observar que  $Z^*$  satisface

$$Z_t^* = Z_0 \exp \left( \left( \mu_Z + r^f - r^d - \frac{1}{2}\sigma_Z^2 \right) t + \sigma_Z W_t \right)$$

o de manera equivalente que las dinámicas de  $Z^*$  vienen dadas por la EDE:

$$dZ_t^* = Z_t^* \left( (\mu_Z + r^f - r^d) dt + \sigma_Z dW_t \right)$$

de donde se sabe que  $Z^*$  es una martingala<sup>14</sup> bajo la medida de probabilidad  $P$ , si y sólo si, el coeficiente de tendencia  $\mu_Z = r^d - r^f$ .

Con el fin de eliminar las posibilidades de arbitraje en esta economía, se introduce la existencia de una medida martingala, la cual se define a continuación.

**Definición 2.3.1.** Una medida de probabilidad  $Q$  equivalente a  $P$  en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}^W)$  es una medida martingala del mercado local si el proceso  $Z^*$  es una  $Q$ -martingala.

---

<sup>14</sup>Ver la demostración de los corolarios (2.2.1, 2.2.2).

**Observación 2.3.1.** Al igual que en el modelo de Black-Scholes se tiene que la medida equivalente viene dada por la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right), \quad P - \text{casi siempre}$$

con  $\gamma = \frac{r^d - r^f - \mu}{\sigma}$  que cumple la condición de novikov. Por el teorema de Girsanov, se tiene que el proceso  $W^*$ , dado por  $W_t^* = W_t - \gamma t$ , para  $t \in [0, T]$ , es un movimiento browniano estándar bajo  $Q$ .

Adicionalmente, como se tiene que  $Z_t = \frac{Z_t^* B_t^d}{B_t^f}$ , entonces la dinámica de la tasa de cambio  $Z$  bajo la medida martingala doméstica  $Q$  viene dada por la EDE

$$dZ_t = Z_t((r^d - r^f)dt + \sigma_Z dW_t^*), \quad Z_0 > 0. \quad (2.23)$$

### 2.3.2. Valoración

Si se quiere valorar una opción de compra sobre una tasa de cambio  $Z$ , con fecha de vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $K$ , se sabe que el precio de dicho activo en la fecha de vencimiento viene dado por:

$$C_T^Z := (Z_T - K)^+$$

entonces el valor de arbitraje de dicho derivado viene dado por la proposición a continuación.

**Proposición 2.3.1.** *El precio de arbitraje, en unidades de moneda local, de una opción de tipo europeo sobre una tasa de cambio, viene dada por la fórmula de valoración neutral al riesgo*

$$C_t^Z = e^{-r^d(T-t)} E_Q((Z_T - K)^+ | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.24)$$

Específicamente, el precio  $C_t^Z$  viene dado por la expresión

$$C_t^Z = Z_t e^{-r^f(T-t)} N(h_1(Z_t, T-t)) - K e^{-r^d(T-t)} N(h_2(Z_t, T-t))$$

donde  $N$  es la función de distribución normal estándar y

$$h_1(z, t) = \frac{\ln\left(\frac{z}{K}\right) + (r^d - r^f + \frac{1}{2}\sigma_Z^2)t}{\sigma_Z \sqrt{t}}$$

$$h_2(z, t) = h_1(z, t) - \sigma_Z \sqrt{t}.$$

*Demostración.* La demostración sigue la misma línea del corolario (2.2.3). En particular, la proposición (2.3.1) introduce cambios en los parámetros manteniendo las fórmulas de valoración de Black-Scholes. El lector interesado puede referirse al trabajo de Garman y Kohlhagen (1983) [24] o puede encontrar la demostración de esta proposición en Musiela [51] proposición 4.2.2.  $\square$

## 2.4. Aplicación

A continuación se valorarán opciones de compra y venta de tipo europeo sobre la tasa de cambio peso/dólar (COP/USD) utilizando las fórmulas de valoración neutrales al riesgo presentadas en las secciones anteriores. Para esto, en primer lugar se realizará un análisis descriptivo de los datos, para luego proceder con la valoración de las opciones.

### 2.4.1. Descripción de los datos: Tasa de Cambio Peso/Dólar (COP/USD)

La tasa representativa del mercado (TRM) es el indicador oficial de la tasa de cambio peso/dólar (COP/USD), la cual es calculada y certificada diariamente por la Superintendencia Financiera de Colombia. La TRM corresponde al promedio aritmético simple de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y venta de divisas registradas el día hábil inmediatamente anterior.

Antes del año 2000, Colombia contaba con un sistema de *banda cambiaria*, en el cual, el Banco de la República fijaba un rango en el que la tasa de cambio debía fluctuar y cada vez que la tasa llegaba al límite superior o inferior del mismo, el Banco intervenía para mantener el rango. A partir del año 2000, se cuenta con un sistema de *flotación sucia*<sup>15</sup>, en el cual, la tasa de cambio se encuentra determinada por la oferta y la demanda. Sin embargo, el Banco de la República aún mantiene la discrecionalidad de intervenir en el mercado de divisas cuando el comportamiento de la tasa de cambio pueda afectar otras variables macroeconómicas como la inflación.

Para el análisis se toman dos muestras: la primera corresponde al período completo en el que la tasa de cambio ha flotado de acuerdo con las dinámicas del mercado, esto es, el período 2000 - 2012. En segundo lugar, se tomará una

---

<sup>15</sup>Se conoce por este nombre, ya que el Banco Central mantiene la discrecionalidad de intervenir en el mercado cuando lo considere necesario, contrario a un sistema de flotación puro en el que la tasa de cambio está determinada únicamente por el mercado.

submuestra para el período 2010-2012, esto con el fin de identificar diferencias en los precios de las opciones cuando se excluye un período de crisis en los mercados financieros y por tanto de mayores volatilidades, como lo fue el período 2008-2009. En ambas muestras, se toman las cifras correspondientes a la TRM entre el primer día hábil del año y el último día hábil, las cuales se encuentran disponibles en el Banco de la República. No se tuvieron en cuenta los festivos en Colombia ni en Estados Unidos, así como los fines de semana. En la figura (2.2) se muestra el gráfico de la TRM para cada una de las muestras en análisis. En general se observa que tanto la media como la varianza no son constantes en el tiempo.

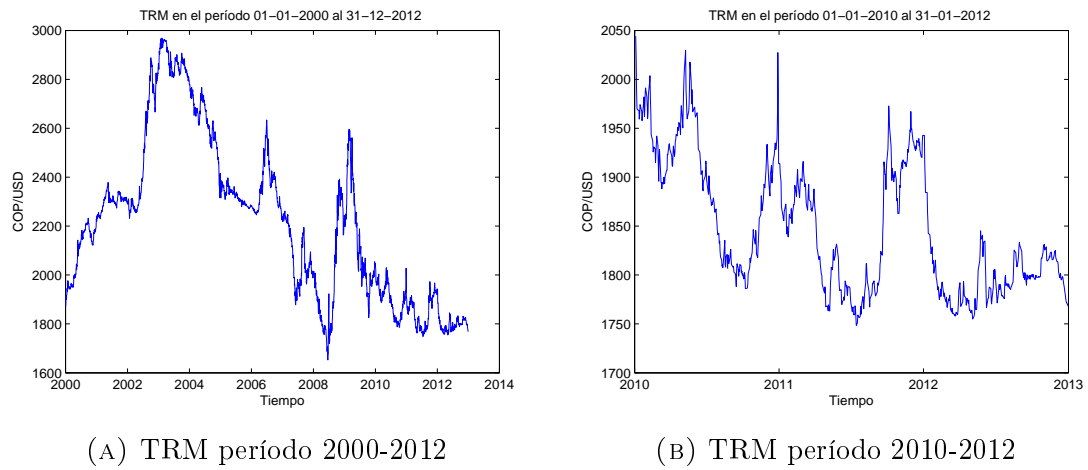


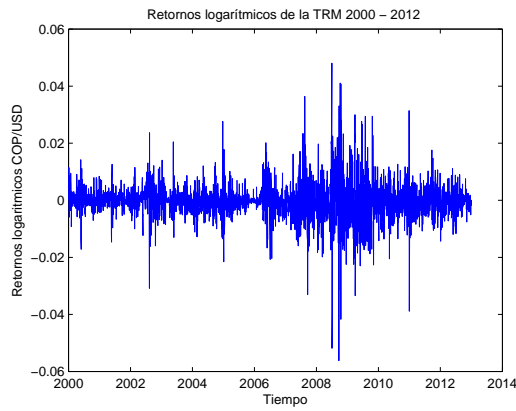
FIGURA 2.2. Gráficos de la Serie diaria de la TRM para las dos muestras en análisis

A continuación se muestran los retornos<sup>16</sup> de la TRM y algunos gráficos descriptivos sobre el comportamiento de los mismos frente a la distribución normal para las dos muestras en análisis.

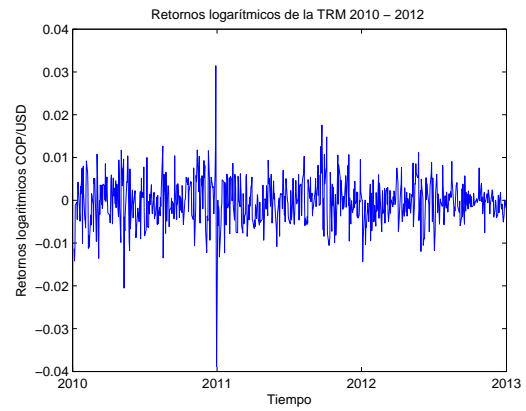
La serie de retornos logarítmicos de la tasa de cambio USD/COP en el período analizado se muestra en las figuras (2.3a, 2.3b) para las dos muestras en análisis. Allí se puede observar que los retornos oscilan alrededor del 0%, sin embargo existen épocas de una mayor variabilidad. Esto verifica que la varianza no es constante a lo largo del tiempo. Además, se puede observar el fenómeno en el que días altamente volátiles tienden a estar precedidos de otros igualmente variables, lo cual se conoce en la literatura como *clusters de volatilidad*.

<sup>16</sup>Los retornos vienen dados por

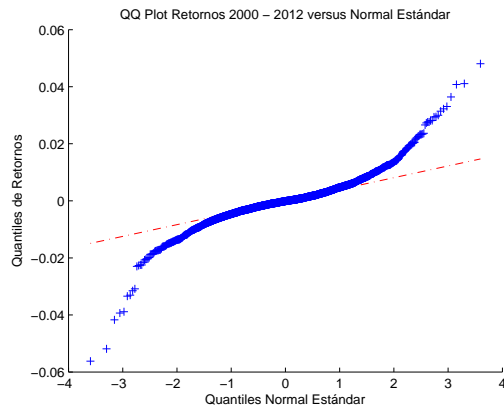
$$R_t = \ln \left( \frac{TRM_t}{TRM_{t-1}} \right)$$



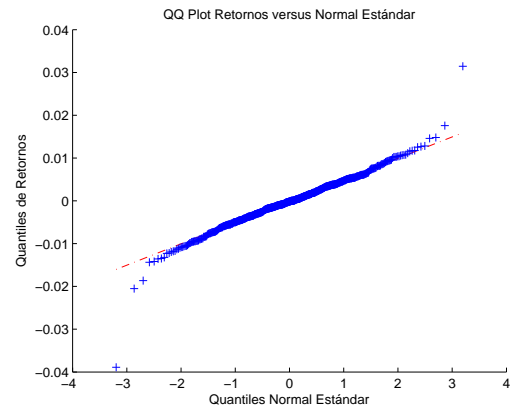
(A) Retornos TRM período 2000-2012



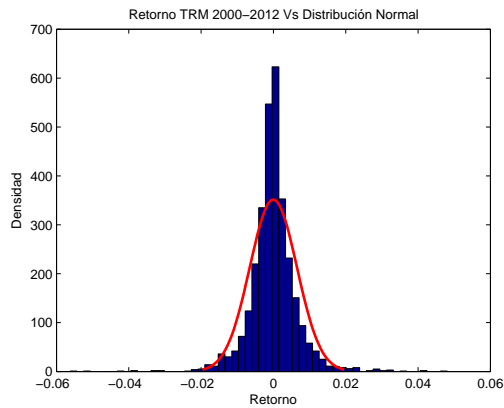
(B) Retornos TRM período 2010-2012



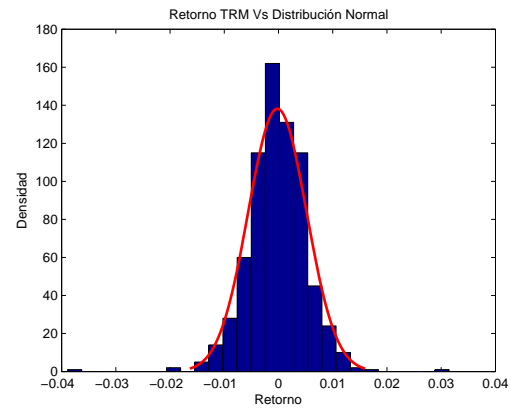
(c) QQ-plot Retornos TRM 2000-2012



(D) QQ-plot Retornos TRM 2010-2012



(E) Histograma Retornos TRM 2000-2012



(F) Histograma Retornos TRM 2010-2012

FIGURA 2.3. Algunos gráficos descriptivos del comportamiento de los Retornos de la TRM para las dos muestras en análisis.

En segundo lugar, en las gráficas (2.3c, 2.3d) se muestra el *QQ-plot* de los retornos, el cual compara los cuantiles de la distribución normal frente a los cuantiles empíricos de los datos, en general, se observa que la distribución de los datos difiere de la distribución normal, principalmente en las colas o valores extremos de la distribución.

Finalmente, en las figuras (2.3e, 2.3f) se observa el histograma de los retornos logarítmicos de la tasa de cambio USD/COP. Allí se puede ver que la distribución difiere de una distribución normal, en cuanto presenta una mayor concentración de datos en el centro (kurtosis) y el fenómeno conocido en la literatura como *colas pesadas*, en el cual, existe una mayor concentración de datos en los extremos de la distribución observada frente a la distribución normal.

Estadístico	Estadísticas serie TRM		Estadísticas serie Retornos	
	2000-2012	2010-2012	2000-2012	2010-2012
Media	2.217,3	1.847,9	$-1,87 \times 10^{-5}$	$-2,02 \times 10^{-4}$
Mediana	2.238,7	1.824,1	$-9,57 \times 10^{-5}$	$-1,67 \times 10^{-4}$
Des-Est	333,41	67,69	$6,5 \times 10^{-3}$	$5,4 \times 10^{-3}$
Varianza	111.160	458,26	$4,25 \times 10^{-5}$	$2,9 \times 10^{-5}$
Curtosis	2,315	21,837	12,1570	8,203
Asimetría	0,4776	0,5781	$8,7 \times 10^{-3}$	-0,3214
Mínimo	1.652,4	1.748,4	-0,0562	-0,0389
Máximo	2.968,9	2.044,2	0,0480	0,0314

TABLA 2.1. Estadísticos de las series TRM y retornos

En la tabla (2.1) se muestran las principales estadísticas tanto para la serie de TRM como para los retornos logarítmicos de la misma, y para las dos muestras en análisis. En particular, se observa que tanto la media como la mediana de la TRM para la muestra correspondiente a los años 2.000-2.012 son mayores que las observadas para la muestra 2.010-2.012. Así mismo, los valores para estos dos estadísticos en la serie de Retornos, se encuentran al rededor de cero. Tanto la desviación estándar como la varianza correspondientes a la primera muestra de la TRM son mayores que los valores correspondientes a la muestra 2.010-2.012. No obstante, la curtosis y la asimetría son menores en la primera muestra.

En la tabla (2.2) se muestran los resultados de las pruebas de normalidad y bondad de ajuste aplicadas a la serie de retornos de la TRM para las dos muestras



en análisis. En la columna de Resultado aparece<sup>17</sup>  $h = 1$  si existe evidencia para rechazar la hipótesis nula al 95 % de confianza, o  $h = 0$  si la hipótesis nula no puede ser rechazada a ese nivel de confianza.

Prueba	Retornos 2000-2012			Retornos 2010-2012		
	Estadísticos		Resultado	Estadísticos		Resultado
ttest Media	Est	-0.1599	h=0	Est	-1.0066	h=0
	p-val	0.8730		p-val	0.3145	
Kolmogorov-Smirnov	Est	0.4879	h=1	Est	0.4916	h=1
	p-val	0.000		p-val	0.000	
Jarque-Bera	Est	10785	h=1	Est	820.03	h=1
	p-val	0.000		p-val	0.000	

TABLA 2.2. Pruebas de Hipótesis Normalidad de la serie Retornos

De acuerdo con las estadísticas descriptivas de la tabla (2.1), se observa que la media de los retornos es cercana a cero para las dos muestras en análisis ( $-1,87 \times 10^{-5}$ ) y ( $-2,02 \times 10^{-5}$ ) respectivamente para la muestra completa y para los dos últimos años. De acuerdo con la prueba  $t$  de normalidad, no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de que la media es estadísticamente igual a cero al 95 % de confianza para ninguna de las dos muestras. Esto es consistente con la intuición empírica, de acuerdo con la cual se espera que los retornos diarios de las series financieras muestren este comportamiento.

En segundo lugar la asimetría de la serie de retornos es negativa ( $-0,3214$ ) para la muestra 2010-2012, lo que indica que la probabilidad de ocurrencia de retornos negativos es mayor que la de los positivos. Para el caso de la muestra 2000-2012, se observa el fenómeno contrario, la asimetría es positiva ( $8,7 \times 10^{-3}$ ), por tanto la probabilidad de ocurrencia de retornos positivos es mayor que la de los negativos.

Así mismo, la curtosis observada en la serie de retornos tanto para la muestra 2000-2012 (12,157), como para la muestra 2010-2012 (8,203), es mayor que la de la distribución normal, lo cual muestra evidencia de un comportamiento leptocúrtico de los datos.

Tanto el comportamiento de la asimetría, como el de la curtosis, ya habían sido observados en el histograma de las figuras (2.3e, 2.3f). Adicionalmente, el que la serie muestre un comportamiento leptocúrtico implica que los retornos tienen colas más pesadas que los de la distribución normal, y por tanto que la probabilidad

<sup>17</sup>Donde  $h$  es una variable indicadora que toma el valor de cero o uno si se rechaza o no la hipótesis nula.

asociada a los valores extremos de la serie es más alta que la asociada a los valores extremos de una distribución normal, tal y como se observó en los QQ plot de las figuras (2.3c, 2.3d).

Estas diferencias entre la asimetría y la curtosis observadas en la serie de retornos de la TRM frente a la distribución normal, son contrastadas en la prueba de normalidad de Jarque-Bera, la cual prueba si los datos tienen el tercer y cuarto momento estadísticamente igual al de una distribución normal, es decir si la asimetría es cero y la kurtosis es tres. Al utilizar el estadístico de Jarque - Bera para la serie de retornos de la TRM se rechaza la hipótesis de normalidad al 95 % de confianza para las dos muestras en análisis. Finalmente, la prueba de Kolmogorov-Smirnov, también rechaza la hipótesis de normalidad de los datos de retornos al 95 % de confianza para ambas muestras.

De acuerdo con Gómez [25], en la literatura es común observar que la hipótesis del MBG donde los retornos logarítmicos del activo subyacente se suponen con una distribución normal se rechaza para el caso de las tasas de cambio. En general, las distribuciones de probabilidad de los retornos de estas series tienen sesgo y curtosis diferentes a los de una distribución normal, como se ha mostrado en esta sección. Adicionalmente, este autor sugiere que estos fenómenos pueden ser explicados o por la presencia de saltos o discontinuidades, o por la naturaleza cambiante de la volatilidad en los datos. La naturaleza cambiante de la volatilidad se analizará a lo largo de los próximos capítulos de este trabajo.

### 2.4.2. Valoración de Opciones sobre la TRM

Aunque en la sección anterior se evidenció que los retornos de la TRM no muestran un comportamiento normal, en este capítulo, se busca establecer el valor óptimo de opciones estándar de compra y venta bajo los supuestos originales del modelo de Black-Scholes. En los próximos capítulos, se modificarán dos de los supuestos de dicho modelo, los cuales son: la función de pagos, al introducir las opciones asiáticas, y la volatilidad, al suponer que ésta tiene un comportamiento estocástico y no constante. Al final del documento, buscaremos establecer las diferencias existentes entre los valores óptimos encontrados bajo los diferentes supuestos.

A continuación, se muestran los valores obtenidos para opciones de compra y venta sobre la tasa de cambio COP/USD para diferentes plazos tomando como base la serie diaria de la TRM para dos muestras, la primera entre el año 2000 y 2012, y la segunda entre el año 2010 y 2012. Se tomará como fecha de suscripción del contrato el último día hábil del año 2011 (30 de diciembre), en el cual el valor

de la TRM fue de 1.942,7 pesos por cada dólar. Adicionalmente, se tomarán las tasas de intervención del Banco de la República de Colombia y de la Reserva Federal de Estados Unidos vigentes en la fecha señalada como las tasas libres de riesgo doméstica y foránea, las cuales corresponden a  $r^l = 3\%$  y  $r^f = 0,25\%$  respectivamente. Se compararán los valores estimados para el precio de las opciones con vencimiento a tres, seis, nueve y doce meses. Así mismo, estas opciones se valorarán para diferentes precios de ejercicio. Adicionalmente, se simulará el valor de la tasa de cambio para cada una de las fechas de vencimiento  $S_T^e$ , suponiendo que éstas se comportan como un movimiento browniano geométrico con volatilidad constante de acuerdo con el modelo de Black-Scholes.

Los resultados obtenidos para las opciones de compra en cada una de las muestras se muestran a continuación.  $S_T^e$  y  $S_T^{obs}$  corresponden al precio del activo subyacente (TRM) estimado y observado respectivamente. *Call* es el precio de la opción de compra y *Put* es el precio de la opción de venta en el momento de suscribir el contrato, de acuerdo con las fórmulas de valoración del modelo de Black-Scholes.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	Call	Put	Call	Put	Call	Put	Call	Put
1800	156,71	1,91	173,09	6,41	189,15	10,70	204,74	14,47
1850	111,57	6,40	131,27	13,86	149,15	19,61	165,91	24,19
1900	72,36	16,82	94,67	26,53	113,71	33,07	131,14	37,96
1950	41,89	35,98	64,54	45,67	83,58	51,86	100,95	56,32
$S_T^e$	1.941,7		1.937,1		1.934,9		1.930	
$S_T^{obs}$	1.771,25		1.805,14		1.799,29		1.779,79	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$ $\sigma_{annual} = 10,11\%$ $\mu_{annual} = -0,45\%$								

TABLA 2.3. Precio de las opciones de compra y venta en el modelo de Black-Scholes sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2000-2012

El precio de las opciones, tanto de compra como de venta, está calculado para un contrato que permite al inversionista comprar o vender un dólar por  $K$  pesos, de acuerdo con el precio de ejercicio de cada opción. Por tanto, un valor de 1,91 en el caso de las opciones de venta *Put* con precio de ejercicio 1.800 y una fecha de vencimiento de 3 meses, significa que, para tener el derecho a vender un dólar por 1.800 pesos en tres meses a partir de la fecha de suscripción del contrato, el inversionista interesado deberá pagar 1,91 pesos en la fecha de suscripción del contrato. Si por ejemplo el inversionista estuviera interesado en vender 1.000 USD, en la fecha de

suscripción del contrato deberá pagar un valor de 1.910 pesos por tener el derecho que le da la opción.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	Call	Put	Call	Put	Call	Put	Call	Put
1800	155,95	1,15	171,10	4,42	186,19	7,74	200,98	10,72
1850	109,81	4,64	128,09	10,68	144,97	15,43	160,93	19,21
1900	69,43	13,89	90,38	22,24	108,44	27,80	125,08	31,90
1950	38,33	32,42	59,59	40,72	77,61	45,88	94,14	49,51
$S_T^e$	1.939,8		1.931,1		1.914,5		1.894,9	
$S_T^{Obs}$	1.771,25		1.805,14		1.799,29		1.779,79	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$ $\sigma_{annual} = 9,18\%$ $\mu_{annual} = -2,55\%$								

TABLA 2.4. Precio de las opciones de compra y venta en el modelo de Black-Scholes sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2010-2012

Si se observan los precios de las opciones de compra y venta en las tablas (2.3,BSPrices:Msample) se encuentra que, para un precio de ejercicio fijo, el precio de las opciones de compra aumenta a medida que aumenta el tiempo para el vencimiento de la opción. Por otro lado, para una fecha de vencimiento dada, el precio de las opciones de compra disminuye en cuanto aumenta el precio de ejercicio. De manera análoga, si se observan los precios de las opciones de venta, se encuentra que al igual que en el caso de las opciones de compra, para un precio de ejercicio fijo, el precio de las opciones de venta aumenta a medida que aumenta el tiempo para el vencimiento de la opción. Finalmente, para una fecha de vencimiento dada, el precio de las opciones de venta aumenta en cuanto aumenta el precio de ejercicio. Estos comportamientos tienen sentido económico, en cuanto a medida que aumenta el tiempo para el vencimiento de la opción aumenta la incertidumbre sobre el precio del activo subyacente y por tanto el precio de las opciones es más alto. Adicionalmente, dados los valores simulados con los supuestos del modelo de Black-Scholes para la TRM, a medida que aumenta el precio de ejercicio disminuye la probabilidad de ejercer las opciones de compra y por tanto su precio es menor. De manera análoga, a medida que aumenta el precio de ejercicio, aumenta la probabilidad de ejercer las opciones de venta y por tanto su precio es mayor.

De acuerdo a los valores observados de la tasa de cambio COP/USD para cada uno de los vencimientos de las opciones de compra, se observa que sólo es óptimo ejercer la opción con vencimiento a seis meses para un precio de ejercicio  $K = 1800$ , ya que éste es el único caso en que el precio observado en la fecha de

vencimiento de la tasa de cambio COP/USD  $S_T^{obs}$  es más alto que el precio de ejercicio. En el caso de las opciones de venta, al contrario de las de compra, siempre resulta óptimo ejercer dicha opción, a excepción de la opción de venta a seis meses con precio de ejercicio  $K = 1800$ . Esto, debido a que en todas las demás opciones el precio de ejercicio es más alto que el precio observado de la tasa de cambio COP/USD, en la fecha de vencimiento.

No obstante, si se analiza la decisión de ejercer o no las opciones de compra y venta de acuerdo con los valores simulados para la TRM se obtienen diferentes resultados. En primer lugar, contrario al caso de los datos observados, siempre resulta óptimo ejercer las opciones de compra con precios de ejercicio  $K = 1800, 1850, 1900$ , a excepción de la opción de compra a un año con precio de ejercicio  $K = 1900$  para la muestra 2010-2012. Se coincide en la decisión de nunca ejercer las opciones de compra con precio de ejercicio  $K = 1950$ . El caso de las opciones de venta es contrario a las opciones de compra, siempre será óptimo ejercer las opciones de venta con precio de ejercicio  $K = 1950$  cuando se compara dicho valor con el dato simulado para la TRM  $S_T^e$ .

Los resultados obtenidos al utilizar todos los supuestos del modelo de Black-Scholes no resultan satisfactorios para los datos de la TRM, en cuanto no se cumplen todos los supuestos de dicho modelo. El propósito de este trabajo en los capítulos siguientes, será modificar dos de los supuestos del modelo de Black-Scholes descrito en este capítulo, con el fin de contrastar los resultados empíricos de estos cambios sobre las estimaciones de los precios de diferentes opciones sobre la TRM. En particular, en el próximo capítulo se introducirán las opciones asiáticas, las cuales, son un tipo de opción exótica cuyo pago al vencimiento no depende únicamente del valor del activo subyacente en ese momento del tiempo, sino que tiene en cuenta el promedio de los precios que tomó dicho activo durante toda la vigencia de la opción. Finalmente, en el cuarto capítulo se introducirá un modelo de volatilidad estocástica que modifica el supuesto de volatilidad constante en el modelo de Black-Scholes.

## CAPÍTULO 3

---

### Valoración de Opciones Asiáticas

---

Las *opciones asiáticas*, también conocidas como *opciones promedio*, son un ejemplo de las *opciones exóticas*. Las opciones exóticas, se diferencian de las estudiadas en el capítulo anterior porque incorporan cambios en la estructura de pagos, lo que implica modificar el método de valoración, con el fin de incorporar estas estructuras. Por ejemplo, el pago que genera una opción asiática en la fecha de maduración depende no sólo del precio que toma el activo subyacente en ese momento del tiempo, sino que depende de todos los precios que haya tomado el activo subyacente durante la vigencia de la opción.

Cuando se valoran opciones exóticas, existen casos en los que es posible introducir variaciones a las fórmulas de valoración del modelo de Black y Scholes y por tanto se puede establecer el valor justo de este tipo de opciones de forma analítica, sin embargo, hay otros casos en los que es necesario recurrir a métodos numéricos con el fin de establecer este valor.

Este trabajo centrará su análisis sobre las opciones asiáticas de tipo europeo en tiempo continuo, las cuales, hacen parte del grupo de opciones cuyo pago depende de la trayectoria seguida por el activo subyacente o *Path-dependent Options*.

Las *opciones asiáticas*, son uno de los tipos de opciones más populares dentro del grupo de las *opciones dependientes de la trayectoria*. De acuerdo con Boyle [10], la primera vez que fue utilizado el término opción asiática para este tipo de contratos fue en 1987 por la oficina de Tokio de *Banker's Trust*, en un contrato sobre petróleo. El pago que este tipo de contratos otorgan en la fecha de vencimiento de la opción, depende del promedio del precio del activo subyacente durante la vigencia de la misma.

El hecho de que las opciones asiáticas estén basadas en el promedio del precio del activo subyacente, las vuelve atractivas para los inversionistas que buscan no sólo cubrirse frente al riesgo de la volatilidad del precio del activo subyacente, sino también frente al riesgo asociado con movimientos sorpresivos del precio del activo subyacente antes de la fecha de vencimiento o a la manipulación de dicho precio justo antes del vencimiento. Igualmente, son atractivas para aquellas empresas que realizan transacciones periódicas en diferentes monedas y que por tanto se encuentran expuestas al riesgo de tasa de cambio. Por lo general, este tipo de opciones son ampliamente utilizadas en los mercados de materias primas y de divisas.

Un ejemplo de cómo una empresa puede utilizar las opciones asiáticas para cubrirse frente al riesgo de tasa de cambio se describe a continuación:

**Ejemplo 3.0.1.** Supóngase una empresa con presencia en Colombia y en otros países, y que realiza sus transacciones en dólares y en pesos colombianos. Por ejemplo, debe pagar suministros y salarios a los empleados en Estados Unidos en dólares y en Colombia en pesos. Las ganancias que obtiene en cada país son calculadas de acuerdo con la moneda local de cada uno de ellos, sin embargo, las ganancias totales de la compañía son expresadas en pesos colombianos.

Dado que las ganancias netas y resultados financieros de la compañía son expresados en pesos colombianos, la empresa se encuentra expuesta al riesgo de tasa de cambio. Si las pérdidas o ganancias son convertidas cada mes de dólares a pesos de acuerdo con la tasa de cambio promedio del mes, con el fin de protegerse frente a las variaciones en la tasa de cambio, a esta empresa le resulta más conveniente utilizar un instrumento de cobertura que ofrezca protección frente a variaciones adversas en la tasa de cambio promedio y no en la tasa de cambio de un día particular del mes. En esta medida, las opciones asiáticas resultan ser un instrumento adecuado de cobertura frente al riesgo de tasa de cambio.

Por ejemplo, esta empresa puede adquirir una opción asiática de venta que le permita vender  $X$  cantidad de dólares al final de un mes y recibir una cantidad  $K$  preestablecida de pesos colombianos por cada dólar, o lo que es lo mismo, puede vender  $X$  dólares a una tasa de cambio preestablecida  $K$  expresada en pesos por dólar, donde  $K$  es el *precio de ejercicio* establecido para la opción. La compañía ejercerá la opción cuando el promedio de la tasa de cambio peso/dólar para la *fecha de vencimiento* de la opción  $T$  sea menor que la tasa de cambio preestablecida  $K$ , ya que de esta manera obtendrá más pesos por cada dólar.

### 3.1. Generalidades

Las opciones asiáticas sobre las cuales se centrará este trabajo se conocen en la literatura como *opciones promedio* o con *precio de ejercicio fijo* y se definen como:

**Definición 3.1.1** (Opciones Promedio). Son un tipo de opción asiática, en la cual, el precio del activo subyacente viene dado por el promedio de los valores que dicho activo tomó durante la vigencia de la opción.

De acuerdo con la definición anterior, el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento  $S_T$  es reemplazado por el promedio de los precios que tomó dicho activo durante toda la vigencia de la opción, dicho promedio se notará por  $A_T$ <sup>1</sup>. Por tanto, introduciendo esta modificación en la fórmula (2.1) correspondiente al pago de las opciones estándar de tipo europeo estudiadas en el capítulo anterior, se tiene que el pago en la fecha de vencimiento de las opciones promedio depende de la diferencia entre el precio promedio del activo subyacente y un precio de ejercicio fijo  $K$ , tal y como se muestra a continuación tanto para las opciones de compra  $C_T$  como para las opciones de venta  $P_T$ :

$$C_T := (A_T - K)^+ \quad (3.1)$$

$$P_T := (K - A_T)^+ \quad (3.2)$$

Adicionalmente, en este tipo de opciones, el método de valoración dependerá del tipo de promedio utilizado en las ecuaciones (3.1, 3.2), el cual puede ser geométrico o aritmético tal y como se muestra a continuación:

#### 1. Promedio Geométrico

$$A_t^G := \exp \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \ln(S_u) du \right] \quad (3.3)$$

#### 2. Promedio Aritmético

$$A_t^A := \frac{1}{t} \int_0^t S_u du \quad (3.4)$$

En la siguiente sección, se verá que si se trabaja con los supuestos del modelo de Black-Scholes, en el que el proceso que rige el comportamiento del activo subyacente viene dado por el movimiento browniano geométrico, es posible encontrar una solución analítica para el caso de las opciones asiáticas con promedio geométrico. En el caso de las opciones asiáticas con promedio aritmético se deberá recurrir a

---

<sup>1</sup>En esta notación el subíndice  $T$  hace referencia al último valor introducido en el promedio, así pues  $A_t$  corresponderá al promedio calculado en el intervalo de tiempo  $[0, t]$



métodos numéricos para establecer su valor óptimo.

En primer lugar se establecerá el precio óptimo de las opciones asiáticas con promedio geométrico, para el cual existe una fórmula exacta de valoración y posteriormente se abordará el problema de la valoración de opciones asiáticas con promedio aritmético, por medio de métodos numéricos.

## 3.2. Opciones Asiáticas de tipo Geométrico

En esta sección se estudia el problema de la valoración de opciones asiáticas de tipo europeo con promedio geométrico, este problema fue abordado en primer lugar por Kemna y Vorst (1990) [36], quienes plantean una fórmula exacta de valoración para este tipo de contratos cuando el activo subyacente cuenta con una distribución lognormal y el precio de ejercicio es fijo. Posteriormente, estos autores utilizan esta expresión para aproximar el precio de las opciones asiáticas con promedio aritmético haciendo uso del método de Montecarlo. Más adelante, Boyle (1993) [9] y Angus (1999) [2] derivaron las fórmulas de valoración generales para este tipo de opciones. En esta sección se seguirán principalmente estos tres trabajos.

### 3.2.1. Generalidades

En primer lugar, se asumirán los mismos supuestos del modelo de Black-Scholes expuestos en la sección (2.2). Como nuestro objetivo es realizar una aplicación a la tasa de cambio, se considerará un activo riesgoso que paga dividendos<sup>2</sup> cuyo precio evoluciona como un movimiento browniano geométrico. Dicho activo se encuentra gobernado por la EDE:

$$dS_t = (\mu + D)S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{con } S_0 = x \quad (3.5)$$

donde  $\mu$ ,  $\sigma$  son constantes positivas,  $x$  es una constante,  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar y  $D$  representa una tasa constante de pago de dividendos. De acuerdo con el modelo planteado por Black-Scholes, se asume que la tasa libre de riesgo  $r > 0$  es constante y por tanto el precio del activo libre de riesgo (Bono) viene dado por:

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

---

<sup>2</sup>Las tasas de cambio son un caso particular de este tipo de activos en el que el porcentaje de dividendo viene dado por la tasa libre de riesgo foránea. Esto puede verse al analizar el proceso auxiliar  $Z_t^*$  en (2.22) sin descontarlo en el mercado local. Esto es,  $\hat{Z} = Z_t^* B_t^d$ , donde  $d\hat{Z}_t = \hat{Z}_t((\mu_Z + r_f)dt + \sigma_Z dW_t)$ .

Adicionalmente, con el fin de poder establecer las propiedades con las que cuenta el promedio geométrico  $A_t^G$ , para cada  $t \geq 0$  se define una nueva variable  $I_t$  dada por

$$I_t := \int_0^t \ln(S_u) du \quad (3.6)$$

de donde para  $t > 0$  se tiene que

$$A_t^G = \exp\left(\frac{I_t}{t}\right).$$

De acuerdo con (3.5), se trabajará con un activo subyacente  $S_t$  con distribución lognormal en el marco del modelo de Black-Scholes. Dada la definición de la variable  $I_t$ , y el hecho de que las variables  $\ln(S_u)$  siguen una distribución normal, se tiene que  $I_t$  tiene con una distribución igualmente normal y por tanto, la variable  $A_t^G$  cuenta una distribución lognormal. Esta situación, permite establecer de manera exacta las fórmulas de valoración de opciones asiáticas con promedio geométrico, las cuales se establecen a continuación. En primer lugar, resulta útil identificar las propiedades de  $S_T$  e  $I_T$ .

### 3.2.2. Propiedades de $S_T$ e $I_T$

Antes de describir la metodología de valoración de opciones asiáticas con promedio geométrico propuesta por Angus [2], es necesario establecer las propiedades de la distribución de  $S_T$  e  $I_T$ . Para lo cual, en primer lugar se establece el proceso que rige el precio del activo riesgoso como solución de la EDE (3.5).

**Proposición 3.2.1.** *La solución a la ecuación (3.5) es el movimiento browniano geométrico dado por*

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu + D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

*Demostración.* Para la prueba se siguen las mismas líneas de la demostración de la proposición (2.2.1), de acuerdo a la cual, es suficiente con utilizar el lema de Itô para comprobar que la ecuación (3.7) satisface la EDE dada en (3.5). Para esto, se introducirá un proceso auxiliar  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  dado por:

$$dX_t = \left(\mu + D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

con  $X_0 = 0$ . Entonces, el proceso  $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$  dado por (3.7) satisface  $S_t = g(X_t)$  para  $t \in [0, T]$ , donde la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $g(x) = S_0 e^x$ .

Se sabe que  $g(x) = g'(x) = g''(x)$  y por tanto, al aplicar la fórmula de Itô se tiene:

$$\begin{aligned} dS_t &= dg(X_t) = g'(X_t) \left( \mu + D - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + g'(X_t)\sigma dW_t + \frac{1}{2}g''(X_t)\sigma^2 dt \\ &= g(X_t)((\mu + D)dt + \sigma dW_t) = S_t((\mu + D)dt + \sigma dW_t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

con lo cual queda demostrada la proposición.  $\square$

Ahora bien, si se tiene la variable  $\ln(S_t)$ , entonces se sabe que dicha variable vendrá dada por:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left( \mu + D - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \text{ para todo } t \in [0, T] \quad (3.9)$$

Además, por las propiedades del movimiento browniano geométrico, se sabe que  $S_t$  tiene una distribución lognormal, por tanto  $\ln(S_t)$  seguirá una distribución normal con parámetros  $(\ln(S_0) + (\mu + D - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ .

En segundo lugar, dado que el valor de las opciones asiáticas no sólo depende de la variable  $S_t$ , sino que también depende del promedio  $A_t^G$  y éste a su vez depende de la variable  $I_t$ , resulta necesario determinar la distribución de  $I_t$ .

Para la fecha de vencimiento  $T$  de la opción, donde  $T \geq t \geq 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} I_T &= \int_0^T \ln(S_u) du \\ &= I_t + \int_t^T \ln(S_u) du \\ &= I_t + \int_t^T \ln \left( S_t \exp \left( \left( \mu + D - \frac{\sigma^2}{2} \right) (u - t) + \sigma(W_u - W_t) \right) \right) du \\ &= I_t + \int_t^T \left( \ln(S_t) + \left( \mu + D - \frac{\sigma^2}{2} \right) (u - t) + \sigma(W_u - W_t) \right) du \\ &= I_t + \int_t^T \ln(S_t) du + \left( \mu + D - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_t^T (u - t) du + \sigma \int_t^T (W_u - W_t) du \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Proposición 3.2.2.**  $I_T$  sigue una distribución normal con media condicionada dada por

$$E(I_T|\mathcal{F}_t) = I_t + (T-t)\ln(S_t) + \frac{\left(\mu + D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2}$$

y varianza

$$Var(I_T) = \frac{\sigma^2(T-t)^3}{3}$$

*Demostración.* A partir de la expresión (3.10) para  $I_T$  se tiene que el valor esperado condicionado a la sigma álgebra  $\mathcal{F}_t$  viene dado por:

$$\begin{aligned} E(I_T|\mathcal{F}_t) &= E\left(I_t + (T-t)\ln(S_t) + \frac{\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2} + \sigma \int_t^T (W_u - W_t)du \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= I_t + (T-t)\ln(S_t) + \frac{\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Lo anterior teniendo en cuenta que por la isometría de Itô se tiene que

$$E\left(\sigma \int_t^T (W_u - W_t)du \middle| \mathcal{F}_t\right) = \sigma \int_t^T E(W_u - W_t|\mathcal{F}_t) du$$

y por las propiedades del movimiento browniano<sup>3</sup> se tiene que  $E(W_u - W_t|\mathcal{F}_t) = E(W_u - W_t) = 0$ .

Por otro lado, la varianza de  $I_T$  viene dada por:

$$\begin{aligned} Var(I_T) &= E[(I_T - E(I_T))^2] \\ &= E\left(\sigma \int_t^T W_u du\right)^2 \\ &= \sigma^2 E\left(\int_t^T W_u du\right)^2 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Ver teorema (1.3.1)

y por la isometría de Itô y las propiedades del movimiento browniano se tiene que

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(I_T) &= \sigma^2 \int_t^T E(W_u)^2 du \\
 &= \sigma^2 \int_t^T u^2 du \\
 &= \sigma^2 \left( \frac{(T-t)^3}{3} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2(T-t)^3}{3}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Adicionalmente, por construcción, se tiene que  $I_T$  viene dada por:

$$I_T = \int_0^T \ln(S_u) du$$

y, como se mostró anteriormente,  $S_u$  viene dado por el movimiento browniano geométrico y por tanto cuenta con una distribución lognormal, de donde  $\ln(S_u)$  sigue una distribución normal. Luego  $I_T$  dado por (3.6), cuenta también con distribución normal. De donde

$$I_T \sim N \left( I_t + (T-t) \ln(S_t) + \frac{(\mu + D - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2}, \frac{\sigma^2(T-t)^3}{3} \right). \tag{3.13}$$

□

### 3.2.3. Valoración

En esta sección se mostrará que es posible encontrar fórmulas de valoración similares a las del modelo de Black-Scholes, cuando se trabaja con opciones asiáticas de tipo geométrico. En particular, se mantienen los supuestos del modelo de Black-Scholes, en el cual se trabaja en un mercado perfecto<sup>4</sup> en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ , sobre el cual se encuentra definido un movimiento browniano estándar  $W_t$  y donde  $\mathcal{F}^W$  es la filtración estándar de  $W$ . Adicionalmente, se mantiene el supuesto sobre el proceso que rige el cambio en el precio del activo riesgoso, el cual viene dado por un movimiento browniano geométrico.

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, se sabe que en el mercado de Black-Scholes existe una medida de probabilidad  $Q$  equivalente a  $P$ , bajo la cual los precios descontados del activo riesgoso  $S_t^*$  son una  $Q$ -martingala. Esta

<sup>4</sup>No existen costos de transacción, se puede prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo, están permitidas las ventas en corto.

medida, viene dada por la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left( \frac{r - D - \mu}{\sigma} W_T^* - \frac{1}{2} \frac{(r - D - \mu)^2}{\sigma^2} T \right), \quad P - \text{casi siempre.}$$

donde el proceso  $W^*$  dado por

$$W_t^* = W_t - \frac{r - D - \mu}{\sigma} t, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

es un movimiento browniano estándar continuo y  $\mathcal{F}^W$ -adaptado en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}^W, Q)$ .

Bajo la medida de probabilidad  $Q$ , se sabe que los precios descontados y sin descontar<sup>5</sup> del activo riesgoso vienen dados, respectivamente, por

$$S_t^* = S_0^* \exp \left( \sigma W_t^* - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \quad (3.14)$$

y

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( r - D - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t^* \right) \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Por tanto bajo la medida de probabilidad  $Q$  se tiene que

$$I_T \sim N \left( I_t + (T - t) \ln(S_t) + \frac{\left( r - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)^2}{2}, \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{3} \right)$$

Por otro lado, el precio en el momento  $t$  de una opción de compra de tipo europeo con fecha de vencimiento  $T$  viene dado por

$$C_t = E^Q \left( e^{-r(T-t)} C_T | \mathcal{F}_t \right) \quad (3.16)$$

A diferencia de las opciones estándar expuestas en el capítulo anterior, el pago en la fecha de vencimiento de las opciones asiáticas de tipo geométrico viene dado por (3.1) donde  $C_T = (A_T - K)^+$ . Luego, por (3.16) el precio en el momento  $t$  de dichas opciones viene dado por

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q \left( e^{-r(T-t)} (A_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right) \\ &= E^Q \left( e^{-r(T-t)} \left( \exp \left( \frac{I_T}{T} \right) - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q \left( \left( \exp \left( \frac{I_T}{T} \right) - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

---

<sup>5</sup>Al igual que en la observación (2.3.1).

y bajo la medida de probabilidad  $Q$

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^Q \left\{ \exp \left( \frac{I_t + (T-t) \ln(S_t) + \frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2} + \sigma \int_t^T (W_u^* - W_t^*) du}{T} \right) - K \right\}^+ | \mathcal{F}_t \} \quad (3.18)$$

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^Q (A^+ | \mathcal{F}_t)$$

con

$$A = \exp \left( \frac{I_t + (T-t) \ln(S_t) + \frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2} + \sigma \int_t^T (W_u^* - W_t^*) du}{T} \right) - K$$

y donde  $W_t^*$  es un movimiento browniano estándar bajo la medida de probabilidad neutral  $Q$  y por tanto los incrementos  $(W_u^* - W_t^*)$  son independientes de la filtración  $\mathcal{F}_t$ . Además se sabe que dichos incrementos cuentan con una distribución normal de parámetros  $(0, u - t)$ .

Si se introduce una variable auxiliar  $y$  con

$$y := Z \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}; \quad Z \sim N(0, 1)$$

en lugar del término  $\int_t^T (W_u^* - W_t^*) du$ , es posible verificar que las propiedades de  $I_T$  dadas por la proposición (3.2.2) se mantienen. De donde se tiene:

$$\begin{aligned} E^Q(A^+ | \mathcal{F}_t) &= \\ &= E^Q \left( \exp \left[ \frac{I}{T} + \frac{(T-t)}{T} \ln(S) + \frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma}{T} Z \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} \right] - K \right)^+ \\ &= E^Q \left( \exp \left[ \frac{I}{T} + \frac{(T-t)}{T} \ln(S) \right] \exp \left[ \frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma}{T} Z \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} \right] - K \right)^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E^Q \left( \exp \left[ \frac{I}{T} \right] \exp \left[ \ln \left( S^{\frac{(T-t)}{T}} \right) \right] \exp \left[ \frac{\left( r - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma}{T} Z \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} \right] - K \right)^+ \\
&= E^Q \left( \exp \left[ \frac{I}{T} \right] S^{\frac{(T-t)}{T}} \exp \left[ \frac{\left( r - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma}{T} Z \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} \right] - K \right)^+
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Resolviendo el valor esperado bajo la medida de probabilidad  $Q$ , el precio de la opción de compra en el momento  $t$  vendrá dado por:

$$C_t = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( \frac{-Z^2}{2} \right) \left( \exp \left[ \frac{I}{T} \right] S^{\frac{(T-t)}{T}} \exp \left[ \frac{\left( r - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma}{T} Z \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} \right] - K \right)^+ dZ$$

Con el fin de simplificar los cálculos del precio de la opción asiática en (3.18), Angus [2] propone un lema, mediante el cual las opciones asiáticas de compra y venta pueden ser fácilmente valoradas. Este importante resultado se presenta a continuación:

**Lema 3.2.1.** [Ver Angus [2]] Sea  $Z$  una variable aleatoria normal y

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\exp \left( \frac{-z^2}{2} \right)}{\sqrt{2\pi}} dz$$

la función de distribución acumulada normal estándar. Entonces bajo la medida de probabilidad  $Q$

$$E \left( H \exp(\bar{\sigma} Z + \bar{\mu}) - k \right)^+ =$$

$$H \exp \left( \bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{H}{k} \right) + \bar{\mu} + \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}} \right) - k \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{H}{k} \right) + \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \right) \tag{3.20}$$

y

$$E \left( H \exp(\bar{\sigma} Z + \bar{\mu}) - k \right)^- =$$

$$-H \exp \left( \bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \Phi \left( \frac{-\ln \left( \frac{H}{k} \right) - \bar{\mu} - \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}} \right) + k \Phi \left( \frac{-\ln \left( \frac{H}{k} \right) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \right)$$

para cualquier valor de las constantes  $H$ ,  $k$ ,  $\bar{\mu}$  y  $\bar{\sigma}$ .



A partir del lema anterior, es posible determinar los valores de las constantes  $H$ ,  $k$ ,  $\bar{\mu}$  y  $\bar{\sigma}$  de una manera conveniente, de tal forma que al valor esperado (3.19) se le pueda aplicar el lema (3.2.1), esto es, se deben determinar las constantes, de tal forma que (3.19) pueda escribirse de la forma (3.20). En esta medida, fijando las constantes como

$$\begin{aligned} H &= \exp\left(\frac{I}{T}\right) S^{\frac{(T-t)}{T}}, \\ \bar{\mu} &= \frac{\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2T}, \\ k &= K \end{aligned}$$

y

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{T} \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}$$

y reemplazando estos valores en la ecuación (3.18), luego de algunas operaciones de simplificación se tiene que:

$$C_t = \exp(-r(T-t)) E^Q (H \exp(\bar{\mu} + \bar{\sigma}Z) - k)^+$$

la cual, es la representación deseada. Ahora, es posible aplicar el lema (3.2.1), de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} E^Q (H \exp(\bar{\mu} + \bar{\sigma}Z) - k)^+ &= \\ &= H \exp\left(\frac{\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2 (T-t)^3}{2T^2 \cdot 3}\right) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \\ &= H \exp\left(\frac{\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2 (T-t)^3}{6T^2}\right) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

con  $d_1$  y  $d_2$  dados por:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{H}{K}\right) + \frac{\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2 (T-t)^3}{3T^2}}{\frac{\sigma}{T} \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}} \\ &= \frac{T \ln\left(\frac{H}{K}\right) + \frac{\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2} + \frac{\sigma^2 (T-t)^3}{3T}}{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}} \end{aligned}$$

y por

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{H}{K}\right) + \frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T}}{\frac{\sigma}{T}\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}} \\ = \frac{T \ln\left(\frac{H}{K}\right) + \frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}}}$$

A partir de lo anterior, el valor de la opción de compra vendrá dado por:

$$C_t = \exp(-r(T-t)) \\ \left[ H \exp\left(\frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}\right) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right].$$

y de manera análoga el precio de la opción de venta vendrá dado por:

$$P_t = \exp(-r(T-t)) \\ \left[ K \Phi(-d_2) - H \exp\left(\frac{(r-D-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}\right) \Phi(-d_1) \right].$$

Las fórmulas de valoración  $V_{call}(S, I, t)$  y  $V_{put}(S, I, t)$  son generales para valorar una opción asiática, tanto de compra como de venta, en cualquier momento  $t \in [0, T]$ . Estas fórmulas, obtenidas por medio de la metodología propuesta por Angus [2], coinciden con las fórmulas de valoración propuestas por Kemna *et al* [36] cuando  $t = 0$ . Cuando  $t = 0$ , la fórmula de valoración de una opción de compra viene dada por:

$$C_0 = e^{-r(T-t)} \left( \exp\left(\frac{1}{2} \left(r - D - \frac{\sigma^2}{6}\right) T\right) S_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right) \quad (3.22)$$

y la de venta por

$$P_0 = e^{-r(T-t)} \left( K \Phi(-d_2) - \exp\left(\frac{1}{2} \left(r - D - \frac{\sigma^2}{6}\right) T\right) S_0 \Phi(-d_1) \right) \quad (3.23)$$

tomando

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \left(r - D + \frac{\sigma^2}{6}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}$$

Las fórmulas (3.22, 3.23) resultan de fijar las constantes:

$$H = S_0 \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2} \left( r - D - \frac{\sigma}{2} \right) T$$

$$\bar{\sigma} = \sigma \sqrt{\frac{T}{3}}$$

Una vez se cuenta con las fórmulas explícitas de valoración para opciones de compra y venta, se procederá a realizar la aplicación para el caso en el que el activo subyacente es la tasa de cambio peso/dólar (COP/USD), lo cual se realizará en la siguiente sección.

### 3.2.4. Aplicación Tasas de Cambio

Al igual que en el capítulo anterior, a continuación se muestran los valores estimados para opciones de compra y venta asiáticas de tipo geométrico sobre la tasa de cambio COP/USD, tomando como base la serie diaria de la TRM para dos muestras, la primera entre el año 2000 y 2012, y la segunda entre el año 2010 y 2012. Se tomará como fecha de suscripción del contrato el último día hábil del año 2011 (30 de diciembre), en el cual el valor de la TRM fue de 1.942,7. Adicionalmente, se tomarán las tasas de intervención del Banco de la República de Colombia y de la Reserva Federal de Estados Unidos vigentes en la fecha señalada como las tasas libres de riesgo doméstica y foránea, las cuales corresponden a  $r^l = 3\%$  y  $r^f = 0,25\%$  respectivamente. Las opciones se calcularán para diferentes plazos y precios de ejercicio.

Los precios de la tasa de cambio COP/USD en las fechas de vencimiento  $S_T^e$  se obtuvieron por medio de simulaciones de Montecarlo, suponiendo que el activo subyacente sigue un MBG como en el modelo de Black-Scholes. Luego fue calculado el promedio geométrico de dichos valores  $A_T^e$ . Fueron realizadas 10.000 simulaciones de  $S_T$  para cada uno de los plazos de las opciones.

Los resultados obtenidos para las opciones de compra en cada una de las muestras se presentan a continuación.  $A_T^e$  y  $A_T^{obs}$  corresponden al promedio geométrico de la (TRM) en el intervalo  $[0, T]$  estimado y observado respectivamente.  $CAG$  es el precio de la opción de compra asiática de tipo geométrico y  $PAG$  corresponde a la opción de venta asiática de tipo geométrico en el momento de suscribir el

contrato, de acuerdo con las fórmulas de valoración establecidas por Angus [2] y Kemna *et al* [36].

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	CAG	PAG	CAG	PAG	CAG	PAG	CAG	PAG
1800	144,26	0,064	146,47	0,79	149,28	2,15	152,35	3,79
1850	95,52	0,94	100,28	3,85	105,27	7,03	110,08	10,05
1900	51,52	6,57	60,19	13,02	67,44	18,08	73,75	22,24
1950	20,19	24,87	30,45	32,54	38,46	37,99	45,26	42,28
$A_T^e$	1.936,8		1.934,8		1.935,1		1.931,2	
$A_T^{obs}$	2.219,9		2.210,6		2.201,9		2.193,6	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011} \quad \bar{\sigma}_{annual} = 5,84\%$								

TABLA 3.1. Precio de las opciones Asiáticas de tipo geométrico de compra y venta sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2000-2012 utilizando las fórmulas de valoración propuestas por Angus [2] y Kemna *et al* [36].

El precio de las opciones tanto de compra como de venta están calculadas para un contrato que permite al tenedor comprar o vender un dólar por  $K$  pesos, de acuerdo con el precio de ejercicio de cada opción. Por tanto, un valor de 144,26 en el caso de las opciones asiáticas de compra de tipo geométrico *CAG* con precio de ejercicio 1.800 y una fecha de vencimiento de 3 meses, significa que para tener el derecho a comprar un dólar por 1.800 pesos en tres meses, el inversionista interesado deberá pagar 144,26 pesos en la fecha de suscripción del contrato. Si por ejemplo el inversionista estuviera interesado en comprar 1.000 USD en la fecha de suscripción del contrato deberá pagar un valor de 144.260 pesos por tener el derecho que le da la opción. Siguiendo a Hunter [33] el precio de las opciones de compra y venta de tipo europeo siempre será mayor que el de las opciones de compra y venta asiáticas. Esto teniendo en cuenta principalmente que la volatilidad asociada con el activo subyacente  $S_t$ , siempre será mayor que la volatilidad asociada con el promedio de dicho activo  $A_t$ . De acuerdo con los resultados de la tabla (3.1) correspondiente a los precios de las opciones asiáticas de tipo geométrico de compra y venta utilizando la muestra 2000-2012, frente a los obtenidos en la tabla (2.3) para las opciones estándar se comprueba este resultado.

Adicionalmente, se encuentra que siempre será óptimo ejercer las opciones de compra para los precios de ejercicio propuestos al comparar estos valores con los datos observados para el promedio  $A_T^{obs}$  de la TRM. Para los datos estimados  $A_T^e$  siempre será óptimo ejercer las opciones de compra a excepción de cuando

éstas tienen precio de ejercicio  $K = 1950$ , ya que en este caso  $A_T^e < K$ . Por su parte, el comportamiento de las opciones de venta es contrario a las de compra. Nunca es óptimo ejercer las opciones de venta, salvo en el caso en que el precio de ejercicio es  $K = 1950$  y este valor se compara frente al valor estimado  $A_T^e$ .

A continuación se muestran los resultados para las opciones asiáticas de tipo geométrico de compra y venta utilizando la muestra 2010-2012. En general, se encuentra que los precios de estas opciones siempre son menores que los obtenidos en la tabla (2.4) para las opciones estándar.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	CAG	PAG	CAG	PAG	CAG	PAG	CAG	PAG
1800	144,59	0,023	146,83	0,41	149,51	1,28	152,43	2,41
1850	95,49	0,54	99,77	2,61	104,39	5,04	108,91	7,42
1900	50,41	5,09	58,42	10,51	65,26	14,80	71,29	18,32
1950	18,32	22,62	27,93	29,28	35,51	33,94	42,01	37,57
$A_T^e$	1.927,2		1.914,1		1.901,5		1.886,9	
$A_T^{obs}$	1.863,4		1.855,8		1.850,6		1.847,1	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011} \quad \bar{\sigma}_{annual} = 5,3 \%$								

TABLA 3.2. Precio de las opciones Asiáticas de tipo geométrico de compra y venta sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2010-2012 utilizando las fórmulas de valoración propuestas por Angus[2] y Kemna *et al* [36].

De acuerdo a los valores estimados para el promedio  $A_T^e$  de la tasa de cambio COP/USD para cada uno de los vencimientos de las opciones de compra, se observa que siempre es óptimo ejercer las opciones con vencimientos a 3, 6 y 9 meses para los precios de ejercicio  $K = 1800, 1850$  y  $1900$ . En el caso de las opciones de compra a un año, sólo es óptimo ejercerlas para los precios de ejercicio  $K = 1800$  y  $1850$ . En el caso de las opciones de venta, al contrario de las de compra, nunca resulta óptimo ejercer dicha opción para los plazos 3, 6 y 9 meses y los precios de ejercicio  $K = 1800, 1850$  y  $1900$ , así como para las opciones de compra a un año con precios de ejercicio  $K = 1800, 1850$ . Sin embargo, si se analiza la decisión de ejercer o no las opciones de compra y venta asiáticas de tipo geométrico frente al promedio  $A_T^{obs}$  de los valores observados para la TRM se obtienen diferentes resultados. En primer lugar, contrario al caso de los datos simulados, ya no será óptimo ejercer las opciones de compra con precio de ejercicio  $K = 1900$  para los vencimientos a 3, 6 y 9 meses. En segundo lugar, ya no es

óptimo ejercer las opciones de compra con vencimiento a un año y precio de ejercicio  $K = 1850$ . El caso de las opciones de venta es contrario a las opciones de compra.

Al comparar los resultados obtenidos para las opciones asiáticas de tipo geométrico en las tablas (3.1) y (3.2) se debe resaltar el hecho de que tanto los valores observados como simulados para  $A_T$  son siempre menores cuando se trabaja con la muestra correspondiente al período 2010-2012, esto aunado al hecho de que la volatilidad estimada para esta muestra es igualmente menor que la de la muestra 2000-2012. Si se observa la gráfica (2.2), correspondiente a los valores de la TRM, se encuentra que a partir del año 2004 la tasa de cambio ha mostrado una tendencia a la baja<sup>6</sup>, la cual se profundizó desde el año 2009, con lo cual, el valor máximo alcanzado por la TRM en la muestra 2010-2012 es 2.044,2 frente al máximo alcanzado en la muestra 2000-2012 de 2.968,9.

### 3.3. Opciones Asiáticas de tipo Aritmético

Contrario al caso en el que se utiliza el promedio geométrico, la distribución del promedio aritmético no es conocida, por tanto, no es posible establecer fórmulas exactas de valoración para las opciones asiáticas de tipo europeo basadas en este tipo de promedio. No obstante, diversos autores han abordado el problema de la valoración de este tipo de opciones por medio de diferentes metodologías, las cuales se describen a continuación:

1. Aproximaciones analíticas: algunos autores abordan el problema de la valoración de opciones asiáticas, tratando de aproximar la función de distribución del promedio aritmético. Los principales trabajos al respecto son los de Levy [43], Turnbull y Wakeman [61], Milevsky y Posner [47] y Curran [17].
2. Simulaciones de Montecarlo: uno de los trabajos más reconocidos es el de Kemna y Vorst [36], quienes fueron pioneros en abordar el problema de la valoración de opciones asiáticas con promedio aritmético, por medio de simulaciones de Montecarlo utilizando un método de reducción de varianza, tomando como variable de control el precio de las opciones asiáticas con promedio geométrico, de las cuales se conoce la fórmula de valoración.
3. Soluciones numéricas a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP): varios autores utilizan la metodología original de valoración de Black-Scholes, la cual, establece las fórmulas para valorar opciones por medio de la solución a una

---

<sup>6</sup>En economía este comportamiento se conoce como *revaluación*.

EDP. En el marco de las opciones asiáticas, se encuentran principalmente los trabajos de Alziary [1], Dewynne y Wilmott [19, 18] y Rogers y Shi [56].

En esta sección se abordará el problema de la valoración de opciones asiáticas con promedio aritmético utilizando métodos numéricos, en particular, la metodología de simulaciones de Montecarlo con reducción de varianza, siguiendo principalmente el trabajo de Kemna y Vorst [36].

Para esto, se mantienen los supuestos del modelo de Black-Scholes, en el cual se trabaja en un mercado perfecto<sup>7</sup> en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ , sobre el cual se encuentra definido un movimiento browniano estándar  $W_t$  y donde  $\mathcal{F}^W$  es la filtración estándar de  $W$ . Adicionalmente, se mantiene el supuesto sobre el proceso que rige el cambio en el precio del activo riesgoso, el cual viene dado por un movimiento browniano geométrico.

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, se sabe que en este mercado existe una medida de probabilidad  $Q$  equivalente a  $P$  bajo la cual los precios descontados del activo riesgoso  $S_t^*$  son una  $Q$ -martingala. Adicionalmente, se sabe que el precio en el momento  $t$  de una opción de compra de tipo europeo con fecha de vencimiento  $T$  viene dado por

$$C_t = E^Q (e^{-r(T-t)} C_T | \mathcal{F}_t) \quad (3.24)$$

En el caso de las opciones asiáticas de tipo aritmético, el pago  $C_T$  está dado por (3.1), esto es,  $C_T = (A_T^A - K)^+$ , donde  $A_T^A$  es como en (3.4), esto es:

$$A_t^A := \frac{1}{t} \int_0^t S_u d_u$$

Luego, por (3.24) el precio en el momento  $t$  de dichas opciones vendrá dado por

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q (e^{-r(T-t)} (A_T^A - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\ &= E^Q \left( e^{-r(T-t)} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u d_u - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q \left( \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u d_u - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Contrario al caso del promedio geométrico, la distribución de  $A_t^A$ , cuando  $S_u$  sigue una distribución lognormal, no se conoce y por tanto, para resolver el valor esperado

<sup>7</sup>No existen costos de transacción, se puede prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo, están permitidas las ventas en corto.

de (3.25) es necesario recurrir a métodos numéricos.

### 3.3.1. Método de Montecarlo con reducción de varianza

Los métodos de Montecarlo fueron introducidos a la valoración de opciones por Boyle [8] en 1977. Sin embargo, hoy en día esta metodología es ampliamente utilizada para valorar opciones con funciones complicadas de resolver de forma analítica, como la presentada en (3.25).

En general, el método de Montecarlo permite aproximar el valor de una integral de manera numérica. Para esto, este método se basa en la ley fuerte de los grandes números: si  $(X_n)$  es una secuencia de variables aleatorias integrables independientes e idénticamente distribuidas tal que  $E(X_1) = E(X)$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = E(X) \text{ c.s.}$$

Por tanto, si es posible generar una muestra finita de variables aleatorias independientes  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$ , entonces la media

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = E(X) \text{ c.s.}$$

permite aproximar el valor de  $\theta = E(X)$ . El error de la estimación vendrá dado por  $\hat{\theta} - \theta$ , de donde, si  $\sigma^2 = Var(X)$ , por el teorema del límite central

$$\hat{\theta} - \theta \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

De acuerdo con lo anterior, si se desea reducir el error estándar de la estimación del parámetro  $\theta$ , es necesario reducir  $\sigma$  o aumentar el número de muestras  $n$ . En algunos casos, aumentar la muestra  $n$  aumenta significativamente el tiempo de la simulación, por tanto, resulta óptimo recurrir a métodos de reducción de varianza.

De acuerdo con Hammersley *et al* [28] los métodos de reducción de varianza son útiles para mejorar la eficiencia<sup>8</sup> de las simulaciones de Montecarlo. Claramente, las simulaciones pueden ser tan precisas como se desee incrementando el número de muestras empleadas. Sin embargo, el tiempo de computación aumenta en la medida en que aumentan las muestras. Dado que el error en el estimador

<sup>8</sup>En términos de la reducción del error estándar de las estimaciones.



viene dado por  $\sigma/\sqrt{n}$ , resulta costoso, en términos del tiempo que toman las estimaciones, mejorar la eficiencia del estimador únicamente incrementando el número de muestras. En esta medida, es útil introducir las metodologías de reducción de varianza como un método alternativo para mejorar la eficiencia del estimador.

Existen diferentes técnicas de reducción de varianza: variables de control, variables antitéticas, entre otras<sup>9</sup>. A continuación se describe de forma general<sup>10</sup> el método de variables de control, ya que es el método empleado por Kemna *et al* [36] para valorar opciones asiáticas de tipo aritmético.

El *método de variable de control* consiste en encontrar una variable aleatoria  $Z$  que se encuentre correlacionada con la variable de interés  $X$ , tal que  $E(Z) < \infty$  es conocido. Si se define un estimador insesgado  $\tilde{\theta}$  de  $\theta := E(Y)$  con  $Y = g(X)$  dado por

$$\tilde{\theta} = Y + \beta(Z - E(Z))$$

entonces  $E(\tilde{\theta}) = E(Y + \beta(Z - E(Z))) = E(Y) = \theta$ . Sin embargo, la varianza de  $\tilde{\theta}$  vendrá dada por

$$Var(\tilde{\theta}) = \beta^2 Var(Z) + 2\beta cov(Y, Z) + Var(Y)$$

de donde, dado que  $Var(\tilde{\theta})$  es función cuadrática de  $\beta$  se tiene que el valor  $\beta^*$  que minimiza dicha varianza vendrá dado por

$$\beta^* = -\frac{cov(Y, Z)}{Var(Z)}$$

y por tanto el valor mínimo de la  $Var(\tilde{\theta})$  es

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\theta}^*) &= Var(Y) - \frac{[Cov(Y, Z)]^2}{Var(Z)} \\ \frac{Var(\tilde{\theta}^*)}{Var(Y)} &= 1 - [\rho(Y, Z)]^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde  $\rho(Y, Z)$  es el coeficiente de correlación entre  $Y$  y  $Z$ . La fórmula (3.26) nos muestra la reducción de varianza relativa obtenida en el estimador insesgado  $\tilde{\theta}$  al emplear la variable de control  $Z$ . A partir de lo anterior y dado que  $Z$  se selecciona tal que  $Cov(Y, Z) \neq 0$ , es preferible utilizar el estimador  $\tilde{\theta}$  en lugar de  $\hat{\theta}$ , en cuanto el primero tendrá un menor error estándar asociado de acuerdo con (3.26).

<sup>9</sup>Para profundizar en los métodos de reducción de varianza, el lector interesado puede consultar los trabajos de Hammersley *et al* [28], Bratley *et al* (1987) [12] and Law *et al* (1991) [40].

<sup>10</sup>Una exposición completa y rigurosa de esta metodología se encuentra en Lavenberg *et al* (1981) [39].

### 3.3.2. Valoración

Una vez se ha descrito la metodología general de Montecarlo con reducción de varianza utilizando variables de control, se procederá a describir la metodología propuesta por Kemna *et al* [36] para valorar opciones asiáticas de tipo aritmético.

En primer lugar, para utilizar la metodología de Montecarlo es necesario discretizar las fórmulas en tiempo continuo. Para esto, dado que se busca encontrar el valor  $C_t$  definido en (3.24), el cual depende del promedio aritmético  $A_T^A$  y también del precio del activo subyacente  $S$ , es necesario establecer las fórmulas que aproximan tanto al promedio aritmético  $A_T^A$  como al activo subyacente  $S_T$  en tiempo discreto. Dado que se mantiene el supuesto sobre el proceso que rige el precio del activo subyacente, el cual está dado por un movimiento browniano geométrico, se conoce la fórmula en tiempo discreto, para un intervalo de tiempo  $\Delta t = \frac{T}{n}$  la cual viene dada por:

$$\frac{\Delta S}{S} = (r - \mu)\Delta t + \sigma\epsilon_t\sqrt{\Delta t} \text{ con } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.27)$$

donde  $E(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ . Adicionalmente, de acuerdo con Kemna *et al*, el promedio aritmético continuo dado por (3.4) puede ser aproximado por la expresión

$$A_T = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{T_i} \quad (3.28)$$

con  $T_i = iT/n$

La variable de interés  $Y$  que se desea estimar por medio del método de Montecarlo viene dada por:

$$Y_T = e^{(-rT)} (A_T^A - K)^+$$

cuyo valor esperado coincide con el precio de la opción asiática de compra de tipo aritmético en  $t = 0$  y que para efectos prácticos se denotará como  $P_A$

$$P_A := E(Y_T) = C_0 = e^{(-rT)} E^Q \left( (A_T^A - K)^+ \right)$$

Como no es conocido el valor esperado  $E^Q \left( (A_T^A - K)^+ \right)$ , se debe utilizar un estimador insesgado que permita encontrar el valor de  $P_A$ . Si se utiliza el método de Montecarlo *crudo*, es decir sin incorporar una metodología de reducción de varianza,

el estimador de  $P_A = E(Y) = C_0$  viene dado por:

$$\hat{P}_A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n C_0^i \quad (3.29)$$

donde  $i = 1, \dots, n$  es el número de simulaciones de realizadas. Kemna *et al* realizaron en primer lugar una estimación del precio de una opción asiática de tipo aritmético utilizando el estimador (3.29), sin embargo, encontraron que los errores estándar asociados con estas estimaciones con un nivel de confianza del 95 % eran grandes. Por tanto, y con el fin de reducir el error estándar y en consecuencia el tamaño del intervalo de confianza para el valor de  $P_A$ , Kemna *et al*, propusieron utilizar la técnica de reducción de varianza utilizando una variable de control. Para esto, era necesario encontrar una variable aleatoria  $P_G$  que dependiera de  $S_{T_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que fuera una expresión aproximada de  $P_A$  y que contara con una expresión analítica para el valor esperado  $E(P_G)$ .

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, se cuenta con una opción similar a las opciones asiáticas de tipo aritmético, la cual es una opción asiática de tipo geométrico. Ambas dependen de la trayectoria seguida por el subyacente  $S$  y se diferencian únicamente en el tipo de promedio empleado. Siguiendo a Beckenbach [4] el promedio geométrico siempre es menor el que el promedio aritmético, por tanto el precio de una opción asiática de tipo geométrico  $P_G$  es una cota inferior para  $P_A$ . Dado que se conoce una solución analítica para  $P_G$  y por tanto se conoce su valor esperado, entonces, es posible utilizar un estimador insesgado  $\tilde{P}_A$  para el precio de una opción asiática de compra de tipo aritmético, dicho estimador vendrá dado por:

$$\tilde{P}_A = P_A + \beta^*(P_G - E(P_G)) \quad (3.30)$$

donde el valor  $P_G$  es conocido por la fórmula de valoración (3.22) y por tanto el error conocido entre  $P_G - \hat{P}_G$  es utilizado como un control para la estimación de  $P_A$ .

En 1997 Boyle *et al* [11] realizaron una comparación entre diferentes métodos de reducción de varianza, con el fin de identificar el método que genera la mayor reducción en la varianza del estimador. Entre los activos que estos autores tomaron para realizar la comparación se encuentran las opciones asiáticas de tipo aritmético. Para este tipo de activos, estos autores encuentran que el método más eficiente para reducir la varianza del estimador es el de variable de control cuando esta variable viene dada por la opción asiática de tipo geométrico. En esta medida, el método de valoración de opciones propuesto por Kemna *et al* [36] resulta eficiente para las opciones asiáticas de tipo aritmético frente a otros métodos de reducción de varianza.

### 3.3.3. Aplicación

A continuación, se realizará la aplicación para el caso de la tasa de cambio COP/USD utilizando la metodología propuesta por Kemna et al. Con el fin de identificar la mejora en la eficiencia del estimador de Montecarlo al incorporar el método de reducción de varianza utilizando como variable de control el precio de la opción asiática de tipo geométrico, se muestran los resultados para el precio de las opciones asiáticas de tipo aritmético de acuerdo con el método de Montecarlo *crudo* (MC) y con el Método de reducción de varianza (MCRV) para 100.000 simulaciones.

Al igual que para las opciones asiáticas de tipo geométrico, se toma como activo subyacente la tasa de cambio COP/USD y se estima el valor de las opciones para diferentes plazos y precios de ejercicio. Igualmente, se realiza la estimación para las dos muestras en análisis, la primera entre el año 2000 y 2012, y la segunda entre el año 2010 y 2012. Con el fin de poder contrastar los valores simulados frente a los observados para todos los plazos de las opciones, se tomará como fecha de suscripción del contrato el último día hábil del año 2011 (30 de diciembre), en el cual el valor de la TRM fue de 1.942,7.

De acuerdo con la información contenida en los cuadros (2.3, 2.4) y (3.1, 3.2) se observó que efectivamente las opciones asiáticas de tipo geométrico, tanto de compra y venta, siempre son menos costosas que las opciones estándar en el modelo de Black-Scholes. Ahora, teniendo en cuenta que el promedio geométrico es una cota inferior para el promedio aritmético, se espera que el precio de las opciones de compra asiáticas de tipo aritmético se encuentre en medio del precio de las opciones de compra estándar y de compra asiáticas de tipo geométrico. Por su parte, para las opciones de venta se espera que sea el precio de las opciones asiáticas de tipo geométrico el que se encuentre en medio del precio de las opciones estándar y las opciones asiáticas de tipo aritmético. Estas relaciones se contrastarán empíricamente a continuación.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike(K)	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV
1800	148,48 (0,177)	144,69 (0,001)	154,41 (0,246)	147,3 (0,002)	161,04 (0,296)	150,51 (0,004)	167,45 (0,338)	153,98 (0,006)
1850	99,24 (0,172)	95,91 (0,001)	107,49 (0,234)	101,04 (0,003)	115,79 (0,279)	106,41 (0,005)	123,76 (0,316)	111,59 (0,007)
1900	54,70 (0,151)	51,85 (0,001)	65,89 (0,203)	60,84 (0,003)	75,85 (0,245)	68,43 (0,006)	85,29 (0,288)	75,13 (0,008)
1950	22,29 (0,106)	20,40 (0,002)	34,82 (0,157)	30,99 (0,004)	45,10 (0,199)	39,33 (0,006)	54,43 (0,234)	46,49 (0,008)
$A_T^{A,est}$	1.949,4(0,179)		1.955,5(0,255)		1.963,1(0,314)		1.969,5(0,364)	
$A_T^{A,obs}$	2.219,9		2.210,6		2.201,9		2.193,6	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 3.3. Precio de las opciones Asiáticas de compra de tipo Aritmético sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2000-2012 utilizando el método MC y MCRV propuesto por Kemna *et al* [36].  $A_T^{A,est}$  corresponde al promedio aritmético estimado por MC para cada uno de los vencimientos de las opciones.  $A_T^{A,obs}$  corresponde al promedio aritmético observado.

Para las opciones de compra asiáticas de tipo aritmético se observa que el precio aumenta en cuanto aumenta el tiempo para el vencimiento de la opción, y el precio de ejercicio disminuye. Por el contrario, el precio de las opciones asiáticas de venta de tipo aritmético aumenta en cuanto aumenta el tiempo para el vencimiento de la opción y aumenta el precio de ejercicio de la misma.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV
1800	148,21 (0,161)	144,94 (0,001)	153,77 (0,226)	147,52 (0,002)	159,76 (0,272)	150,55 (0,003)	166,16 (0,311)	153,81 (0,005)
1850	98,89 (0,158)	95,82 (0,001)	106,31 (0,215)	100,42 (0,0027)	114,16 (0,257)	105,35 (0,004)	121,63 (0,293)	110,21 (0,006)
1900	53,47 (0,140)	50,69 (0,001)	64,23 (0,189)	58,98 (0,003)	73,64 (0,227)	66,12 (0,005)	82,57 (0,261)	72,48 (0,007)
1950	20,04 (0,095)	18,52 (0,001)	32 (0,143)	28,39 (0,003)	41,79 (0,182)	36,26 (0,005)	50,39 (0,214)	43,05 (0,007)
$A_T^{A,est}$	1949.3(0.163)		1956.3(0.231)		1963(0,285)		1969.8(0.331)	
$A_T^{A,obs}$	1863.4		1855.8		1850.6		1847.1	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 3.4. Precio de las opciones Asiáticas de compra de tipo Aritmético sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2010-2012 utilizando el método MC y MCRV propuesto por Kemna *et al* [36].  $A_T^{A,est}$  corresponde al promedio aritmético estimado por MC para cada uno de los vencimientos de las opciones.  $A_T^{A,obs}$  corresponde al promedio aritmético observado.

De acuerdo con los cálculos realizados, tanto para la muestra 2000-2012 como para la muestra 2010-2012, se observa que el precio de las opciones de compra asiáticas de tipo aritmético, para todas las fechas de vencimiento y para todos los precios de ejercicio, de acuerdo con los valores reportados en los cuadros (3.3, 3.4) es siempre mayor que el de las opciones de compra asiáticas de tipo geométrico reportado en los cuadros (3.1, 3.2), tanto para los valores estimados de acuerdo con el método de Montecarlo crudo, como por el método de Montecarlo con reducción de varianza.

Adicionalmente, al comparar los valores obtenidos para el precio de las opciones de compra asiáticas de tipo aritmético frente al precio de las opciones de compra estándar reportado en los cuadros (2.3, 2.4) se observa que para todos los plazos y para todos los precios de ejercicio, el precio de las opciones de compra estándar es siempre mayor. Por tanto, empíricamente se conserva la relación

$$Call_{BS} > Call_{A^A} > Call_{A^G}$$

donde  $Call_{BS}$  corresponde al precio de las opciones de compra estándar de acuerdo con el modelo de Black-Scholes,  $Call_{A^A}$  corresponde al precio de las opciones de

compra asiáticas de tipo aritmético obtenidos utilizando el método de Montecarlo y  $Call_{AG}$  es el precio de las opciones de compra asiáticas de tipo geométrico obtenidos por medio de la metodología de valoración propuesta por Kemna *et al* y Angus.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV
1800	0,04 (0,003)	0,061 (0,000)	0,581 (0,016)	0,76 (0,001)	1,56 (0,031)	2,07 (0,003)	2,72 (0,044)	3,66 (0,004)
1850	0,744 (0,016)	0,916 (0,001)	3,09 (0,041)	3,75 (0,002)	5,43 (0,061)	6,86 (0,003)	7,68 (0,078)	9,81 (0,004)
1900	5,80 (0,050)	6,47 (0,001)	10,91 (0,082)	12,83 (0,002)	15,05 (0,107)	17,78 (0,004)	18,12 (0,125)	21,86 (0,005)
1950	22,72 (0,102)	24,69 (0,001)	28,52 (0,135)	32,23 (0,002)	32,74 (0,159)	37,56 (0,004)	35,46 (0,177)	41,74 (0,005)
$A_T^{A,est}$	1.949,4(0,179)		1.955,5(0,255)		1.963,1(0,314)		1.969,5(0,364)	
$A_T^{A,obs}$	2.219,9		2.210,6		2.201,9		2.193,6	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 3.5. Precio de las opciones Asiáticas de venta de tipo Aritmético sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2000-2012 utilizando el método MC y MCRV propuesto por Kemna *et al* [36].  $A_T^{A,est}$  corresponde al promedio aritmético estimado por MC para cada uno de los vencimientos de las opciones.  $A_T^{A,obs}$  corresponde al promedio aritmético observado.

De manera similar al caso de las opciones de compra, para el caso de las opciones de venta se encuentra para todas las fechas de vencimiento y para todos los precios de ejercicio y para ambas muestras de datos, que el precio de las opciones de venta estándar de acuerdo con el modelo de Black-Scholes es siempre mayor que el precio de las opciones de venta asiáticas de tipo geométrico y que éste a su vez es siempre mayor que el precio de las opciones de venta asiáticas de tipo aritmético, tanto para el valor estimado por medio del método de Montecarlo crudo, como utilizando el método de Montecarlo con reducción de varianza. Por tanto empíricamente se mantiene la relación

$$Put_{BS} > Put_{AG} > Put_{AA}$$

donde  $Put_{BS}$  corresponde al precio de las opciones de venta estándar de acuerdo con el modelo de Black-Scholes,  $Put_{AA}$  corresponde al precio de las opciones de venta asiáticas de tipo aritmético obtenido utilizando el método de Montecarlo y  $Put_{AG}$  es

el precio de las opciones de venta asiáticas de tipo geométrico obtenidos por medio de la metodología de valoración propuesta por Kemna *et al* y Angus.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
Strike (K)	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV	MC	MCRV
1800	0,016 (0,002)	0,021 (0,000)	0,30 (0,011)	0,397 (0,001)	0,91 (0,022)	1,23 (0,002)	1,77 (0,033)	2,32 (0,003)
1850	0,434 (0,011)	0,524 (0,000)	2,06 (0,032)	2,54 (0,002)	3,92 (0,049)	4,92 (0,003)	5,56 (0,063)	7,25 (0,003)
1900	4,38 (0,041)	5,02 (0,001)	8,88 (0,071)	10,36 (0,002)	12,22 (0,091)	14,57 (0,003)	14,56 (0,106)	18,04 (0,004)
1950	20,78 (0,093)	22,48 (0,001)	25,78 (0,122)	29,02 (0,002)	29,05 (0,143)	33,60 (0,003)	31,56 (0,159)	37,13 (0,004)
$A_T^{A,est}$	1.949,3(0,163)		1.956,3(0,231)		1.963(0,285)		1.969,8(0,331)	
$A_T^{A,obs}$	1.863,4		1.855,8		1.850,6		1.847,1	
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 3.6. Precio de las opciones Asiáticas de venta de tipo Aritmético sobre la TRM para diferentes vencimientos y precios de ejercicio. Resultados para la muestra 2010-2012 utilizando el método MC y MCRV propuesto por Kemna *et al* [36].  $A_T^{A,est}$  corresponde al promedio aritmético estimado por MC para cada uno de los vencimientos de las opciones.  $A_T^{A,obs}$  corresponde al promedio aritmético observado.



## CAPÍTULO 4

---

### Opciones Asiáticas con Volatilidad Estocástica

---

El concepto de volatilidad es fundamental en la teoría financiera, ya que juega un papel muy importante en la valoración de opciones y en las estrategias de cobertura frente al riesgo. En este contexto, la volatilidad crea incertidumbre sobre los precios futuros de los activos y en consecuencia genera riesgo. Sin embargo, la volatilidad no es directamente observable y por tanto su análisis genera gran interés tanto en el campo académico como en el campo práctico.

Muchos autores han abordado el problema de la volatilidad en la valoración de activos financieros. En particular, se destacan los trabajos de Hull & White (1987) [32], quienes proponen un modelo en el que la volatilidad es considerada un proceso estocástico independiente del proceso que rige el precio del activo financiero. Heston (1993) [31] propone un proceso de reversión a la media el cual se encuentra correlacionado con el proceso que rige el cambio en los precios de los activos financieros. Melino & Turnbull (1990)[44], al igual que Heston, consideran la existencia de volatilidad estocástica en las tasas de cambio y proponen que el logaritmo de la volatilidad sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Estudios empíricos muestran que la volatilidad varía en el tiempo de forma aleatoria y en el caso de las tasas de cambio, dicha volatilidad presenta el fenómeno conocido como *reversión a la media*. En particular, se encuentran los trabajos de Bessembinder *et al* (1995) [5], Jorion & Sweeney (1996) [35], entre otros, los cuales muestran evidencia de reversión a la media en las tasas de cambio.

Por su parte, en el caso colombiano se encuentran los trabajos de Lega *et al*

[41] quienes utilizan un modelo GARCH para caracterizar y estimar los componentes de la volatilidad en la tasa de cambio peso/dólar, en particular, estos autores encuentran evidencia de que dicha volatilidad no es constante y que es mayor en períodos de devaluación que en los de revaluación. Adicionalmente, se encuentran los trabajos de Gómez [25] y León [42] quienes estiman superficies de volatilidad para opciones sobre la tasa de cambio, el primero haciendo uso de un modelo GARCH y el segundo utilizando un modelo de difusión con saltos. En ambos casos, es evidente que la volatilidad de las tasas de cambio peso/dólar no es constante en el tiempo. Finalmente, se encuentra el trabajo de Grajales [26] quien realiza una estimación de los parámetros del modelo de Heston a partir de los datos observados de la tasa de cambio peso/dólar.

Hasta el momento, en este trabajo hemos valorado diferentes opciones en el marco del modelo de Black-Scholes. Sin embargo, los datos observados en los mercados financieros no se ajustan perfectamente a los supuestos de dicho modelo. En particular, la volatilidad de los activos financieros no muestra un comportamiento constante en el tiempo. Para el caso de la tasa de cambio peso/dólar es evidente por los gráficos (2.2) que este supuesto no se cumple. En este capítulo, se relajará el supuesto de volatilidad constante del modelo de Black-Scholes y, dado el comportamiento empírico de las tasas de cambio, se trabajará con dos modelos de reversión a la media: el modelo de Heston y el propuesto por Hull & White. Adicionalmente, se utilizará el método de Montecarlo para estimar el precio de las opciones asiáticas de tipo geométrico y aritmético cuando la volatilidad es considerada como un proceso estocástico. Para esto, en primer lugar describiremos el modelo de volatilidad estocástica propuesto por Hull & White y el propuesto por Heston, en segundo lugar, se establecerán las condiciones bajo las cuales es posible utilizar la metodología de valoración neutral al riesgo para valorar opciones de tipo europeo cuando se tiene en cuenta un modelo de volatilidad estocástica. En tercer lugar, se realizará una aproximación por medio del método de Montecarlo para los precios de las opciones asiáticas, tanto de tipo aritmético como geométrico, cuando el activo subyacente es la tasa de cambio peso/dólar. Finalmente, se realizará una comparación entre los diferentes precios de las opciones sobre la tasa de cambio estimados a lo largo de este trabajo, ya que el objetivo principal es establecer las diferencias existentes entre estos precios cuando se introducen cambios en la función de pagos (opciones asiáticas frente a opciones estándar) y cuando se trabaja en un escenario con volatilidad constante frente a uno con volatilidad estocástica.

## 4.1. Modelos de Volatilidad Estocástica

Una vez se ha identificado que la volatilidad  $\sigma$  de los activos financieros no es constante en el tiempo, se recurre a la modelación dinámica de este importante parámetro. En primer lugar, se puede modelar la volatilidad  $\sigma(t)$  como una función del tiempo o como una función  $\sigma(X_t)$  del precio del activo subyacente (*modelo de volatilidad local*). En segundo lugar, aparecen los modelos de volatilidad estocástica, en los cuales se asume que existe un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  que rige el cambio en el comportamiento de la volatilidad. Finalmente, existen los modelos de series de tiempo, entre los cuales, los modelos GARCH son particularmente utilizados en finanzas.

En este trabajo nos centraremos en el análisis de la volatilidad desde los modelos que plantean la existencia de un proceso estocástico que rige el cambio en dicho parámetro. En particular, se tendrán en cuenta modelos que incorporan una característica empírica de las tasas de cambio: el fenómeno de reversión a la media. Este fenómeno, consiste en la tendencia de un proceso de regresar a su valor medio de largo plazo. En general, los modelos de reversión a la media son de la forma:

$$\begin{aligned}\sigma &= f(v) \\ dv &= q(m - v)dt + c dW_t\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde

- $c \geq 0$  es una constante que representa la volatilidad de la volatilidad  $\sigma$ .
- $m$  es la tendencia de largo plazo de  $\sigma$ .
- $q$  es la tasa de reversión a la media
- $(W_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar.

La ecuación (4.1) es un proceso Ornstein-Uhlenbeck en  $v$ , con una solución conocida dada por

$$v_t = m + (v_0 - m)e^{qt} + c \int_0^t e^{-qt} dW_t$$

donde  $v_t$  tiene distribución

$$v_t \sim N\left(m - (v_0 - m)e^{qt}, \frac{c^2}{2q}(1 - e^{-2qt})\right)$$

A continuación, se describen dos modelos que incorporan el fenómeno de reversión a la media, el propuesto por Hull & White [32] y el propuesto por Heston [31].

### 4.1.1. Modelo de Hull & White

El modelo planteado por Hull & White [32] establece que el precio del activo riesgoso sigue la EDE:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t) \quad (4.2)$$

y que la volatilidad  $\sigma_t$  viene dada por

$$d\sigma_t = a(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d\tilde{W}_t \quad (4.3)$$

donde  $a(\sigma_t, t) \in \mathbb{R}$  es la tendencia de  $\sigma_t$ ,  $b(\sigma_t, t) > 0$  es la volatilidad de  $\sigma_t$  y,  $W$  y  $\tilde{W}$  son movimientos brownianos estándar unidimensionales independientes bajo la medida de probabilidad  $P$ . De manera equivalente, el proceso  $(W, \tilde{W})$  sigue un movimiento browniano bi-dimensional bajo la medida de probabilidad  $P$ .

Una de las características que diferencia este modelo de otros modelos de volatilidad estocástica, es el supuesto de correlación cero entre el proceso que rige el cambio en la volatilidad y el que rige el cambio en el precio del activo riesgoso. Este supuesto, permitirá establecer una fórmula de valoración para una opción europea similar a la del modelo de Black-Scholes, por medio de la metodología de valoración neutral al riesgo.

Una vez planteado el modelo de volatilidad estocástica, el interrogante que se debe resolver es: ¿es posible valorar una opción de tipo europeo por medio de la metodología de valoración neutral al riesgo?, lo cual subyace en resolver la siguiente pregunta: ¿es posible encontrar una medida equivalente martingala  $Q$  tal que el precio descontado del activo riesgoso sea una martingala bajo esta medida de probabilidad?. A continuación se verá que la respuesta a estos dos interrogantes es afirmativa.

#### 4.1.1.1. Valoración de Opciones

Como se ha descrito a lo largo de este documento, la metodología de valoración neutral al riesgo se basa en la existencia de una medida de probabilidad  $Q$  conocida como *medida martingala equivalente*, la cual es equivalente a la medida de probabilidad real  $P$  y bajo la cual los precios descontados del activo riesgoso son una martingala. Cuando se trabaja con un modelo de volatilidad estocástica, el razonamiento sigue siendo el mismo, por tanto en primer lugar se debe encontrar una medida de probabilidad  $Q$  bajo la cual se tenga que

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma_t dW_t^*) \quad (4.4)$$

y

$$d\sigma_t = \hat{a}(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d\hat{W}_t \quad (4.5)$$

y además que los precios descontados  $S^*$  sean una  $Q$ -martingala. Esto para alguna función  $\hat{a}(\sigma_t, t)$  y donde se tenga que  $(W^*, \hat{W})$  sea un movimiento browniano bi-dimensional bajo la medida de probabilidad  $Q$ .

Para esto, es necesario escoger un proceso  $\lambda(\sigma_t, t)$ , conocido como el *precio de mercado del riesgo de volatilidad*, el cual se encuentra asociado con la transformación de Girsanov de la probabilidad  $P$  y que da origen a una medida martingala equivalente.

Antes de proceder con la aplicación del Teorema de Girsanov para el caso multidimensional, por medio del cual se puede determinar la MME que permite valorar las opciones en el modelo de Hull & White, se debe notar que el proceso que sigue el activo subyacente bajo este modelo dado por (4.2) condicionado a una trayectoria muestral de la volatilidad  $\sigma$ , tiene el mismo comportamiento que el proceso que rige el cambio en el precio del activo subyacente en el modelo de Black-Scholes, esto es,  $S$  tiene una distribución lognormal bajo la medida de probabilidad  $Q$  al igual que en los modelos en que se supone volatilidad constante.

Si se define una medida de probabilidad  $Q$  equivalente a  $P$  dada por la derivada de Radon-Nikodym (Proposición 1.5.1) con  $\gamma = (\alpha, \beta)$  donde

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} &= \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \gamma_u \cdot dW_u \right) \\ &= \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \alpha_u dW_u \right) \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \beta_u d\tilde{W}_u \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por el desarrollo del modelo de Black-Scholes<sup>1</sup>, se sabe que  $\alpha_t = \frac{r-\mu}{\sigma_t}$ , por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \alpha_u dW_u \right) &= \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \frac{r-\mu}{\sigma_u} dW_u \right) \\ &= \exp \left( \int_0^T \frac{r-\mu}{\sigma_u} dW_u - \int_0^T \frac{1}{2} \frac{(r-\mu)^2}{\sigma_u^2} du \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup>Ver (2.11)

y

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_T \left( \int_0^T \beta_u d\tilde{W}_u \right) &= \mathcal{E}_T \left( \int_0^T \beta(\sigma_u, u) d\tilde{W}_u \right) \\ &= \exp \left( \int_0^T \beta(\sigma_u, u) d\tilde{W}_u - \int_0^T \frac{1}{2} \beta^2(\sigma_u, u) du \right)\end{aligned}\quad (4.8)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  y  $\beta(\sigma_t, t)$  es uniformemente acotada tal que se satisface la condición de Novikov<sup>2</sup>. Aplicando el teorema de Girsanov (1.5.2), se tiene que  $(W^*, \hat{W})$  dado por

$$W_t^* = W_t - \alpha_t \quad (4.9)$$

y

$$\hat{W}_t = \tilde{W}_t - \beta(\sigma_t, t) \quad (4.10)$$

es un movimiento browniano estándar bi-dimensional bajo la medida martingala  $Q$ .

Incorporando (4.9) en (4.2) se tiene (4.4) bajo  $Q$ .

Por (4.10) se tiene que

$$d\tilde{W}_t = \hat{W}_t + \beta(\sigma_t, t)dt$$

y por tanto

$$\begin{aligned}d\sigma_t &= a(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d\tilde{W}_t \\ &= a(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d(\hat{W}_t + \beta(\sigma_t, t)dt) \\ &= a(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d\hat{W}_t + b(\sigma_t, t)\beta(\sigma_t, t)dt \\ &= \hat{a}(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d\hat{W}_t\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde

$$\hat{a}(\sigma_t, t) = a(\sigma_t, t) + b(\sigma_t, t)\beta(\sigma_t, t)$$

y (4.11) coincide con (4.5).

Una vez definida la MME, es posible mostrar que los precios descontados del activo riesgoso son una martingala bajo cualquier medida de probabilidad  $Q$  dada por (4.6)<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Ver proposición (1.5.2)

<sup>3</sup>Note que a diferencia del modelo de Black-Scholes, cuando se tiene en cuenta un modelo de volatilidad estocástica no existe una única MME y por tanto se dice que el mercado no es completo. En este caso, siguiendo a Musiela *et al* [51] se escoge una MME *ad hoc* que haga las veces de probabilidad neutral para la valoración de los activos contingentes haciendo uso de un método como el de Montecarlo.

**Proposición 4.1.1.** *El proceso descontado del activo riesgoso  $S^*$  para  $t \in [0, T]$  dado por*

$$S_t^* = B_t^{-1} S_t = S_0 \exp \left( \int_0^t \sigma_u dW_u^* - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du \right)$$

*es una martingala con respecto a  $\mathcal{F}^W$  bajo  $Q$ .*

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Musiela *et al* [51] Proposición 7.4.2.  $\square$

Una vez se sabe que existe una MME tal que el precio descontado del activo riesgoso  $S^*$  es una martingala bajo dicha medida de probabilidad, es posible hacer uso de la fórmula de valoración neutral al riesgo:

$$\pi_t(X)^\gamma = B_0 E_Q(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.12)$$

donde la notación  $\pi_t(X)^\gamma$  hace referencia a que esta fórmula se tiene para una MME en particular. El valor  $\pi_t(X)^\gamma$  para las opciones asiáticas tanto de tipo geométrico como aritmético en el marco del modelo de Hull & White se estimará a partir del método de Montecarlo.

#### 4.1.2. Modelo de Heston

Otro modelo de volatilidad estocástica de gran importancia en los mercados de divisas, es el propuesto por Heston [31] en 1993. Este modelo, asume que el precio del activo riesgoso satisface la EDE:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sqrt{v_t} d\hat{W}_t \quad (4.13)$$

con la volatilidad gobernada por la EDE:

$$dv_t = q(m - v_t)dt + c\sqrt{v_t}dW_t \quad (4.14)$$

donde de manera análoga al modelo de reversión a la media en (4.1),  $q$  es la tasa de reversión a la media,  $m$  es la tendencia de largo plazo de  $v_t$ ,  $c$  es la volatilidad de  $v_t$  y,  $W$  y  $\hat{W}$  son movimientos brownianos estándar unidimensionales definidos en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con variación cruzada dada por

$$\langle W, \hat{W} \rangle_t = \rho \quad (4.15)$$

para alguna constante  $\rho \in [-1, 1]$ . La constante  $\rho$  se conoce como el coeficiente de correlación entre  $W$  y  $\hat{W}$  y el modelo (4.13, 4.14) se conoce como modelo de

volatilidad estocástica correlacionado.

A continuación se introduce un lema que será de gran utilidad para poder establecer más adelante la fórmula de valoración neutral al riesgo en el modelo de Heston.

**Lema 4.1.1.** Sean  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$  y  $\hat{W} = \{\hat{W}_t\}_{t \geq 0}$  movimientos brownianos estándar que satisfacen la condición (4.15), entonces existe un movimiento browniano estándar  $Z = \{Z_t\}_{t \geq 0}$  independiente de  $W$  tal que se tiene

$$\hat{W} = \sqrt{1 - \rho^2}Z + \rho W \quad (4.16)$$

*Demostración.* La demostración puede ser consultada en Gulisashvili [27] Lema 2.1.  $\square$

Bajo la condición (4.16) el modelo de Heston puede reescribirse como:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sqrt{v_t} \left( \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + \rho dW_t \right) \quad (4.17)$$

con la volatilidad gobernada por la EDE:

$$dv_t = q(m - v_t)dt + c\sqrt{v_t}dW_t \quad (4.18)$$

#### 4.1.2.1. Valoración

A continuación se verificará para el modelo de Heston, la existencia de una MME tal que los precios descontados del activo riesgoso sean martingalas. Una vez hallada dicha medida, es posible valorar las opciones por medio de la fórmula de valoración neutral al riesgo.

Para esto, es necesario aplicar la versión multidimensional del teorema de Girsanov dada por (1.5.2). Para lo cual, si se tiene que  $\tilde{W} = (\hat{W}, W)$  es un movimiento browniano estándar bi-dimensional en un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $T > 0$  fijo. Además, si se asume que  $\lambda = (\delta, \xi)$  es un proceso adaptado tal que

$$E_Q \left\{ \exp \left( \int_0^T \lambda_u \cdot dW_u - \int_0^T |\lambda_u|^2 du \right) \right\} = 1 \quad (4.19)$$

donde  $|\lambda_u|^2 = (\delta_u)^2 + (\xi_u)^2$ . Entonces se define una medida de probabilidad equivalente a  $P$  en  $(\Omega, \mathcal{F})$  dada por la derivada de Radon-Nikodym de  $Q$  con respecto a



$P$ , la cual viene dada por

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left( \int_0^T \lambda_u \cdot dW_u - \int_0^T |\lambda_u|^2 du \right) \quad P - \text{casi siempre} \quad (4.20)$$

luego, por el teorema de Girsanov se tiene que  $W^* = (\tilde{W}, \bar{W})$  dado por

$$W^* = (Z_t - \delta_t, W_t - \xi_t)$$

es un movimiento browniano bi-dimensional bajo la medida de probabilidad  $Q$ , donde los procesos  $\tilde{W}$  y  $\bar{W}$  son independientes. Adicionalmente, bajo la medida de probabilidad  $Q$ , el modelo de Heston dado por (4.17, 4.18) puede reescribirse como:

$$dS_t = S_t \left( \mu - \sqrt{v_t} \left( \sqrt{1 - \rho^2} \delta_t + \rho \xi_t \right) \right) dt + S_t \sqrt{v_t} \left( \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}_t + \rho d\bar{W}_t \right) \quad (4.21)$$

con la volatilidad gobernada por la EDE:

$$dv_t = (q(m - v_t)dt + c\sqrt{v_t}\xi_t)dt + c\sqrt{v_t}d\bar{W}_t \quad (4.22)$$

Para que el precio descontado del activo riesgoso  $S_t^* = e^{-rt}S_t$  dado por

$$dS_t = S_t \left( \mu - r - \sqrt{v_t} \left( \sqrt{1 - \rho^2} \delta_t + \rho \xi_t \right) \right) dt + S_t \sqrt{v_t} \left( \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}_t + \rho d\bar{W}_t \right)$$

sea una martingala bajo la medida de probabilidad  $Q$  se debe tener que

$$r = \mu - \sqrt{v_t} \left( \sqrt{1 - \rho^2} \delta_t + \rho \xi_t \right)$$

de donde  $\delta$  debe ser igual a<sup>4</sup>:

$$\delta_t = \frac{\mu - r}{\sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{v_t}} - \frac{\rho \xi_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (4.23)$$

Una vez se sabe que existe una MME tal que el precio descontado del activo riesgoso  $S^*$  es una martingala bajo dicha medida de probabilidad, es posible hacer uso de la fórmula de valoración neutral al riesgo:

$$\pi_t(X)^\lambda = B_0 E_Q(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.24)$$

<sup>4</sup>Para que se cumpla la condición de que  $\sqrt{v_t} \neq 0$  se requiere que  $c^2 \leq 2m$ . Para que  $\delta \neq 0$  además se requiere que  $1 < \rho < 1$ . Para profundizar sobre el tema, el lector interesado puede referirse a Gulisashvili [27] Capítulo 2.

donde la notación  $\pi_t(X)^\lambda$  hace referencia que esta fórmula se tiene para una MME en particular.

Al igual que en el modelo de Hull & White, para valorar opciones asiáticas con volatilidad estocástica en el modelo de Heston se utilizará el método de Montecarlo.

## 4.2. Aplicación

A continuación se utilizará el método de Montecarlo para establecer los valores de las opciones de compra y venta asiáticas de tipo geométrico y de tipo aritmético cuando se incorpora un modelo de volatilidad estocástica. Sin embargo, a diferencia del método empleado en el capítulo anterior para estimar el precio de las opciones asiáticas bajo el supuesto de volatilidad constante, en el caso de los modelos de volatilidad estocástica, no se conoce una fórmula de valoración exacta para ninguno de los tipos de promedio, ni para el geométrico ni el aritmético. Por tanto, no es posible utilizar el método de reducción de varianza utilizando una variable de control, sino que se debe recurrir a un método alternativo.

A continuación, se describe el método de reducción de varianza por medio de variables antitéticas, el cual será utilizado para establecer los precios de las opciones asiáticas de compra, tanto de tipo aritmético como geométrico, para los dos modelos de volatilidad estocástica anteriormente expuestos.

### 4.2.1. Variables antitéticas

Se supone, al igual que en caso del método de reducción de varianza por medio de variables de control, que se desea estimar  $\theta = E(Y) = E(g(X))$  y para esto se generan dos muestras independientes e idénticamente distribuidas  $Y^1$  y  $Y^2$ . Entonces un estimador insesgado de  $\theta$  viene dado por

$$\hat{\theta} = \frac{Y^1 + Y^2}{2}$$

de donde la varianza de dicho estimador es:

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{Var(Y^1) + Var(Y^2) + 2Cov(Y^1, Y^2)}{4}$$

A partir de  $Var(\hat{\theta})$ , es claro que existe una reducción en la varianza del estimador siempre que las variables  $Y^1$  y  $Y^2$  se encuentren negativamente correlacionadas. Por

tanto, si el estimador del método de Montecarlo crudo viene dado por

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \text{ con i.i.d } X_i \sim N(0, 1)$$

el estimador vendrá dado por

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(X_i) + g(-X_i)}{2} \text{ con i.i.d } X_i \sim N(0, 1)$$

donde  $X_i$  y  $-X_i$  se conocen como variables antitéticas y se encuentran negativamente correlacionadas.

### 4.2.2. Simulaciones

A continuación, se muestran los precios estimados para las opciones de compra asiáticas tanto para el promedio geométrico como para el promedio aritmético, dichos resultados fueron obtenidos por medio del método de Montecarlo con reducción de varianza por medio de variables antitéticas (MCRV). Las fechas de vencimiento son las mismas utilizadas para el cálculo de las opciones asiáticas con volatilidad constante, al igual que los parámetros correspondientes a la tasa libre de riesgo local, la tasa libre de riesgo foránea y el valor inicial  $S_0$ .

Dado que la volatilidad no es una variable observable, en general, cuando se trabaja con modelos de volatilidad estocástica los parámetros de estos modelos son estimados a partir de los valores implícitos de la volatilidad en los precios reales que toman las opciones en el mercado. En el caso colombiano y en particular para la tasa de cambio, no se cuenta con esta información, ya que el mercado de derivados en Colombia es aún incipiente. Por tanto, se decidió utilizar un método alternativo utilizado por Crespo [16] a partir de los datos históricos. Para esto, se construyó una serie de volatilidad tomando la volatilidad para tres días de los retornos de la TRM.

#### 4.2.2.1. Modelo de Hull & White

En primer lugar, fueron estimados los parámetros  $(a, b)$  del modelo de volatilidad propuesto por Hull & White dado por (4.3) a partir de la serie de volatilidad construida para la tasa de cambio peso/dólar. Con base en estos parámetros, fueron estimadas las diferentes trayectorias del precio del activo subyacente y el precio de

las opciones de compra. Los parámetros estimados para el modelo de volatilidad para cada una de las muestras consideradas se resumen en la tabla a continuación.

Muestra	$a(\sigma_t)$	$b(\sigma_t)$
2000-2012	0,91 %	0,13 %
2010-2012	0,61 %	0,00635 %

TABLA 4.1. Parámetros estimados para el modelo de volatilidad estocástica de Hull & White.

Con base en los parámetros del modelo de volatilidad, se estimó el precio para las opciones de compra asiáticas de tipo geométrico (AG) y aritmético (AA) para cada una de las muestras, de acuerdo con el método de Montecarlo con reducción de varianza por medio de variables antitéticas.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
K	AG	AA	AG	AA	AG	AA	AG	AA
1800	147,67 (0,0817)	148,22 (0,0827)	152,33 (0,1146)	153,80 (0,1185)	156,61 (0,1386)	159,31 (0,1477)	160,76 (0,1709)	164,92 (0,1925)
1850	98,08 (0,0817)	98,61 (0,0824)	102,93 (0,1126)	104,39 (0,1166)	107,45 (0,1428)	110,16 (0,1537)	112,14 (0,1734)	116,36 (0,1976)
1900	48,39 (0,0817)	48,93 (0,0826)	53,74 (0,1153)	55,23 (0,1199)	58,81 (0,1434)	61,55 (0,1555)	63,35 (0,1721)	67,56 (0,1935)
1950	2,69 (0,0448)	2,96 (0,0470)	7,09 (0,0833)	8,19 (0,0914)	11,87 (0,1186)	14,16 (0,1356)	16,26 (0,1477)	19,98 (0,1744)
$A_T^{est}$	1.948,8	1.949,4	1.954,8	1.956,3	1.960,1	1.962,9	1.965,3	1.969,6
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 4.2. Precio de las opciones asiáticas de compra de tipo geométrico y aritmético sobre la TRM bajo el modelo de Hull & White. Resultados para la muestra 2000-2012.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
K	AG	AA	AG	AA	AG	AA	AG	AA
1800	147,83 (0,0216)	148,26 (0,0218)	152,66 (0,0948)	153,81 (0,0976)	157,12 (0,1180)	159,21 (0,1255)	161,34 (0,1400)	164,43 (0,1534)
1850	98,198 (0,0694)	98,63 (0,0701)	103,31 (0,0984)	104,47 (0,0986)	108,09 (0,1177)	110,18 (0,1253)	113,11 (0,1378)	116,23 (0,1513)
1900	48,70 (0,0685)	49,13 (0,0691)	54,13 (0,0944)	55,28 (0,0974)	59,57 (0,1179)	61,62 (0,1251)	64,30 (0,1373)	67,49 (0,1509)
1950	2,28 (0,038)	2,49 (0,040)	6,68 (0,0727)	7,59 (0,0783)	11,50 (0,1011)	13,31 (0,1116)	16,60 (0,1254)	19,51 (0,1408)
$A_T^{est}$	1.949,1	1.949,5	1.955	1.956,2	1.960,7	1.962,8	1.966,5	1.969,8
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 4.3. Precio de las opciones asiáticas de compra de tipo geométrico y aritmético sobre la TRM bajo el modelo de Hull & White. Resultados para la muestra 2010-2012.

En general, se encontró que el precio de las opciones asiáticas de compra teniendo en cuenta el modelo de volatilidad estocástica de Hull & White es sistemáticamente mayor que su homólogo con volatilidad constante, cuando estas opciones se encuentran *in the money*, es decir, para los casos en los que el precio del activo subyacente<sup>5</sup> es mayor que el precio de ejercicio  $K$ <sup>6</sup>. En la medida en que el precio de ejercicio se acerca al precio del activo subyacente este comportamiento se revierte y para las opciones *out of the money*<sup>7</sup>, es decir, para aquellas en las que el precio del subyacente es menor que el precio de ejercicio, el precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica es sistemáticamente menor que el precio de sus homólogas con volatilidad constante. Esto ocurre tanto para las opciones asiáticas de tipo geométrico como aritmético y para las dos muestras en análisis. Adicionalmente, se encuentra que el precio de las opciones asiáticas de compra con volatilidad estocástica en el modelo de Hull & White, al igual que en el caso de las opciones asiáticas con volatilidad constante, es siempre menor que el precio de las opciones estándar dado por el modelo de Black-Scholes.

<sup>5</sup>En este caso el promedio.

<sup>6</sup>En este caso para  $K = 1800$  y  $1850$

<sup>7</sup>En este caso para  $K = 1900$  y  $1950$

#### 4.2.2.2. Modelo de Heston

En primer lugar, fueron estimados los parámetros  $(q, m, c)$  del modelo de volatilidad propuesto por Heston dado por (4.14) y con base en estos parámetros, fueron estimadas las diferentes trayectorias del precio del activo subyacente y el precio de las opciones de compra asiáticas de tipo geométrico y de tipo aritmético.

Dada la ausencia de datos del mercado para estimar los parámetros del modelo de Heston, se recurrió a la metodología propuesta por Grajales [26], quien plantea la estimación de los parámetros del modelo de Heston para la TRM por medio de la optimización de una función de verosimilitud que contrasta los datos reales de la TRM frente a una simulación de dicha serie incorporando el supuesto de volatilidad estocástica en el marco del modelo de Heston. No obstante, para poder aplicar la metodología de Grajales, es necesario establecer una semilla frente a la cual se encontrará un óptimo local.

Como la volatilidad no es observable y tampoco se cuenta con datos reales del precio de las opciones en el mercado para poder estimarla, con el fin de establecer los parámetros de la semilla necesaria para aplicar la metodología de Grajales, se decidió utilizar el método propuesto por Crespo [16]. En esta medida, se utilizó el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros  $\theta \equiv (q, m, c)$  de la ecuación de volatilidad en el modelo de Heston (4.14) utilizando la serie de volatilidad construida a partir de los datos observados para la TRM, y asumiendo que la volatilidad no se encuentra correlacionada con la tasa de cambio. Adicionalmente, el parámetro  $\rho$  y  $\mu$  fue estimado a partir de las series de volatilidad y de la TRM.

Para esto, se tiene que la función de verosimilitud para la serie de volatilidad con  $n$  observaciones viene dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n-1} P(v_{t_{i+1}} | v_{t_i}; \theta, \Delta t)$$

y por conveniencia computacional se trabajará con la función de log-verosimilitud

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} P(v_{t_{i+1}} | v_{t_i}; \theta, \Delta t)$$

donde

$$\hat{\theta} \equiv (\hat{q}, \hat{m}, \hat{c}) = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta)$$

Los parámetros estimados  $\hat{\theta} \equiv (\hat{q}, \hat{m}, \hat{c})$  se tomaron como semilla para la estimación de los parámetros del modelo de Heston<sup>8</sup> aplicando la metodología propuesta por Grajales en cada una de las muestras en análisis.

	$q$	$m$	$c$	$\rho$	$\mu$
Semilla	65.15	0.0044	0.6408	-0,09	-0,0045
Estimación ML	54.07	0.0034	0.8752	-0.0936	-0.0041

TABLA 4.4. Parámetros estimados para el modelo de volatilidad estocástica de Heston para la muestra 2000-2012.

	$q$	$m$	$c$	$\rho$	$\mu$
Semilla	140.53	0.0045	0.7165	-0,29	-0,0255
Estimación ML	129.54	0.006	0.8678	-0,2216	-0,0201

TABLA 4.5. Parámetros estimados para el modelo de volatilidad estocástica de Heston para la muestra 2010-2012.

Con base en los parámetros estimados para el modelo de volatilidad, se estimó el precio para las opciones de compra asiáticas de tipo geométrico (AG) y aritmético (AA) para cada una de las muestras, utilizando el método de Montecarlo con reducción de varianza por medio de variables antitéticas.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
K	AG	AA	AG	AA	AG	AA	AG	AA
1800	148,16 (0,1106)	148,24 (0,1106)	153,80 (0,1511)	153,97 (0,1514)	159,13 (0,1812)	159,39 (0,1817)	164,23 (0,2050)	164,59 (0,2058)
1850	98,64 (0,1106)	98,73 (0,1106)	104,56 (0,1498)	104,73 (0,1502)	110,22 (0,1808)	110,48 (0,1813)	115,51 (0,2071)	115,87 (0,2079)
1900	48,95 (0,1094)	49,04 (0,1095)	55,34 (0,1504)	55,50 (0,1507)	60,80 (0,1808)	61,06 (0,1813)	67,20 (0,2071)	67,56 (0,2079)
1950	4,01 (0,0635)	4,05 (0,0639)	9,34 (0,1085)	9,46 (0,1093)	15,02 (0,1436)	15,23 (0,1448)	20,78 (0,1763)	21,09 (0,1777)
$A_T^{est}$	1.949,4	1.949,3	1.956	1.956,2	1.962,5	1.962,8	1.969,3	1.969,7
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-}2011$								

TABLA 4.6. Precio de las opciones asiáticas de compra de tipo geométrico y aritmético sobre la TRM bajo el modelo de Heston. Resultados para la muestra 2000-2012.

<sup>8</sup>Incorporando la correlación entre los movimientos brownianos estándar de la ecuación que rige el cambio en el precio del activo riesgoso y la que rige el cambio en la volatilidad.

$t - T$	3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
K	AG	AA	AG	AA	AG	AA	AG	AA
1800	147,98 (0,1442)	148,19 (0,1444)	153,36 (0,2067)	153,78 (0,2073)	158,02 (0,2538)	158,66 (0,2548)	163,57 (0,2910)	164,42 (0,2925)
1850	98,61 (0,1446)	98,82 (0,1448)	104,11 (0,2072)	104,53 (0,2078)	109,89 (0,2529)	110,53 (0,2539)	115,10 (0,2937)	115,97 (0,2952)
1900	48,74 (0,1441)	48,95 (0,1443)	55,09 (0,2030)	55,51 (0,2036)	60,95 (0,2550)	61,58 (0,2561)	66,83 (0,2976)	67,69 (0,2894)
1950	5,24 (0,0815)	5,35 (0,082)	11,51 (0,1408)	11,79 (0,1426)	17,54 (0,1921)	18,01 (0,1948)	22,72 (0,2269)	23,40 (0,2304)
$A_T^{est}$	1.949,4	1.949,6	1.955,8	1.956,3	1.961,9	1.962,5	1.968,5	1.969,4
$t = T$	29-Mar-2012		27-Jun-2012		25-Sep-2012		24-Dic-2012	
$t_0 = 30\text{-Dec-2011}$								

TABLA 4.7. Precio de las opciones asiáticas de compra de tipo geométrico y aritmético sobre la TRM bajo el modelo de Heston. Resultados para la muestra 2010-2012.

Al igual que para el modelo de volatilidad estocástica propuesto por Hull & White, en las estimaciones para el precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica dada por el modelo de Heston, se encuentra que el precio de estas opciones es sistemáticamente mayor que su homólogo con volatilidad constante cuando se encuentran *in the money*, es decir, para los casos en los que el precio del activo subyacente<sup>9</sup> es mayor que el precio de ejercicio  $K$ <sup>10</sup>. En la medida en que el precio de ejercicio se acerca al precio del activo subyacente, este comportamiento se revierte y para las opciones *out of the money*<sup>11</sup> el precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica es sistemáticamente menor que el precio de sus homólogas con volatilidad constante. Esto ocurre tanto para las opciones asiáticas de tipo geométrico como aritmético y para las dos muestras en análisis. Adicionalmente, se encuentra que el precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica en el modelo de Heston, al igual que en el caso de las opciones asiáticas con volatilidad constante, es siempre menor que el precio de las opciones estándar dado por el modelo de Black-Scholes.

Por otro lado, al comparar los resultados obtenidos para el precio de las opciones asiáticas de compra con volatilidad estocástica en el modelo de Heston frente a los obtenidos en el modelo de Hull & White, se encuentra que el precio

<sup>9</sup>En este caso el promedio.

<sup>10</sup>En este caso para  $K = 1800$  y  $1850$

<sup>11</sup>En este caso para  $K = 1900$  y  $1950$



de las opciones asiáticas de compra de tipo geométrico en el modelo de Heston es siempre mayor que su homólogo en el modelo de Hull & White. No obstante, para las opciones asiáticas de compra de tipo aritmético, no se encuentra una relación sistemática entre las estimaciones realizadas con base en el modelo de Heston y las realizadas con base en el modelo de Hull & White.

### 4.3. Comparación de Resultados

A lo largo del documento se estimaron precios para diferentes opciones sobre la tasa de cambio peso/dólar (COP/USD). En particular se tienen las siguientes conclusiones:

1. El precio de las opciones asiáticas de compra tanto en el caso geométrico como en el caso aritmético para plazos de tres, seis, nueve y doce meses, para diferentes precios de ejercicio, siempre fue menor al compararlo con el precio de las opciones estándar dado por el modelo de Black-Scholes, cuando se trabajó bajo el supuesto de volatilidad constante. En particular, se validó la relación

$$Call_{BS} > Call_{AA} > Call_{AG}$$

donde  $Call_{BS}$  corresponde al precio de las opciones de compra estándar de acuerdo con el modelo de Black-Scholes,  $Call_{AA}$  corresponde al precio de las opciones de compra asiáticas de tipo aritmético obtenido utilizando el método de Montecarlo y  $Call_{AG}$  es el precio de las opciones de compra asiáticas de tipo geométrico obtenido por medio de la metodología de valoración propuesta por Kemna *et al* y Angus.

En esta medida, una de las justificaciones principales para utilizar opciones asiáticas en lugar de opciones estándar, es que la primera tiene un menor costo en relación con el precio de las opciones estándar, en general, esta disminución en el precio está asociada con la reducción en la volatilidad del activo subyacente cuando éste es la tasa de cambio (opciones estándar) o cuando es el promedio de la misma (opciones asiáticas).

Contrato	Call Estándar	Call Asiática Geométrica	Call Asiática Aritmética	Call Asiática H&W	Call Asiática Heston
Contrato para comprar un (1) dólar por K=\$1.850 pesos en 6 meses	131,27	100,28	107,49	102,93	104,56
Contrato para comprar mil (1.000) dólares por K=\$1.850 pesos en 6 meses	131.270	100.280	107.490	102.930	104.560

TABLA 4.8. Ejemplo de la diferencia en el precio de las diferentes opciones analizadas. Para las opciones con volatilidad estocástica se tomó el caso de una opción asiática de tipo geométrico.

En la tabla (4.8) se puede observar que a medida que aumenta el monto sobre el cual se suscribe el contrato, la diferencia entre el precio de las opciones asiáticas y las opciones estándar es más representativa. Por ejemplo, para el caso de un contrato sobre 1.000 dólares la diferencia entre el precio de una opción estándar frente al precio de una opción asiática de tipo geométrico es de 30.990 pesos y para un contrato sobre un dólar esta diferencia era 30,99 pesos.

2. Por su parte, el precio de las opciones asiáticas de venta tanto en el caso geométrico como en el caso aritmético para plazos de tres, seis, nueve y doce meses, para diferentes precios de ejercicio, siempre fue menor al compararlo con el precio de las opciones estándar dado por el modelo de Black-Scholes cuando se trabajó bajo el supuesto de volatilidad constante. En particular se validó la relación

$$Put_{BS} > Put_{AG} > Put_{AA}$$

donde  $Put_{BS}$  corresponde al precio de las opciones de venta estándar de acuerdo con el modelo de Black-Scholes,  $Put_{AA}$  corresponde al precio de las opciones de venta asiáticas de tipo aritmético obtenido utilizando el método de Montecarlo y  $Put_{AG}$  es el precio de las opciones de venta asiáticas de tipo geométrico obtenido por medio de la metodología de valoración propuesta por Kemna *et al* y Angus.

3. El precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica estimadas a partir del modelo de volatilidad de Hull & White y del modelo de Heston, son sistemáticamente mayores que sus homólogos con volatilidad constante cuando se encuentran *in the money*, es decir, para los casos en los que el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio  $K$ . En la medida en que el precio de ejercicio se acerca al precio del activo subyacente, este comportamiento se revierte y para las opciones *out of the money* el precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica, es sistemáticamente menor que el precio de sus homólogas con volatilidad constante. Esto ocurre tanto para las opciones asiáticas de tipo geométrico como aritmético y para las dos muestras en análisis. Adicionalmente, el precio de las opciones asiáticas con volatilidad estocástica al igual que en el caso de volatilidad constante es siempre menor que el precio de las opciones estándar dado por el modelo de Black-Scholes.

---

## Conclusiones

---

- La teoría de procesos estocásticos y los métodos numéricos, como el método de Montecarlo, han demostrado ser herramientas útiles para la valoración de opciones financieras. En la medida en que se busca valorar activos más complejos como lo son las opciones asiáticas, los métodos numéricos juegan un papel fundamental.
- Aunque el modelo de Black-Scholes para valoración de opciones es ampliamente utilizado en los mercados financieros, es claro que algunos activos como las tasas de cambio, no se comportan de acuerdo con los supuestos de este modelo. En particular, las tasas de cambio no muestran una volatilidad constante en el tiempo. Por tanto, el estudio de modelos de volatilidad y la incorporación de estos modelos dentro de las metodologías de valoración de opciones es fundamental.
- Las opciones asiáticas son ampliamente utilizadas en los mercados de divisas debido a que son menos susceptibles a la manipulación y su precio es menor que el de las opciones estándar. En este documento, se encontró que al incorporar un modelo de volatilidad estocástica en la estimación de los precios de las opciones asiáticas, existen ocasiones en las que el precio estimado es aún menor que el de las opciones asiáticas asumiendo volatilidad constante.
- El desarrollo de mayor investigación y análisis sobre modelos alternativos para valoración de opciones o la utilización de opciones exóticas para la cobertura del riesgo cambiario aplicados al caso colombiano, puede contribuir al desarrollo del mercado de opciones en Colombia, el cual, actualmente es aún incipiente.

---

## Trabajo futuro

---

- Analizar el efecto de un cambio sobre el supuesto del proceso que rige el comportamiento del activo subyacente (movimiento browniano geométrico) sobre los precios de las opciones asiáticas en un escenario de volatilidad constante y uno de volatilidad estocástica.
- Analizar la pertinencia de utilizar otro tipo de opciones exóticas para la cobertura del riesgo cambiario y comparar los precios de estos activos frente a los estudiados en este trabajo.
- Aplicar otros modelos de volatilidad, por ejemplo, el modelo de volatilidad local para valorar opciones asiáticas. Para lo cual se puede seguir la aproximación propuesta por Foschi *et al* [23].
- Implementar métodos numéricos alternativos a los planteados en este trabajo en la estimación del precio de opciones asiáticas de tipo aritmético. Al respecto se encuentra el trabajo de Mudzimbabwe *et al* [50] entre otros autores.
- Comparar los resultados obtenidos al estimar el precio de las opciones asiáticas utilizando el modelo de Hull & White clásico, es decir, en el que se asume que no existe correlación entre el proceso que rige el cambio en el precio del activo subyacente y el proceso que rige el cambio en la volatilidad, en comparación con los obtenidos utilizando el modelo de Hull & White que permite una correlación diferente de cero entre estos dos procesos. Al respecto, recientemente Fatone *et al* [22] presentan fórmulas explícitas para este modelo de volatilidad estocástica.

# APÉNDICE

---

## Códigos en Matlab

---

A continuación se presentan los principales códigos utilizados para calcular el precio de las opciones en los diferentes capítulos de este trabajo.

1. Valoración de opciones estándar de acuerdo con el modelo de Black-Scholes

```
%Opción de compra estándar de acuerdo con el modelo de BS;
%-----;
function price = BS_European_Call(S, K, sigma, rl,rf, T);
d1 = (log(S/K)+(rl-rf+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2 = (log(S/K)+(rl-rf-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
price = S*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);
%-----;
%Opción de venta estándar de acuerdo con el modelo de BS;
%-----;
function price = BS_European_Put(S, K, sigma, rl,rf, T);
d1 = (log(S/K)+(rl-rf+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2 = (log(S/K)+(rl-rf-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
price = K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S*normcdf(-d1);
```

2. Valoración de opciones asiáticas de tipo Geométrico utilizando las fórmulas modificadas del modelo de Black-Scholes propuestas por Kemna el Al [36] y Angus [2].

```
% Opción Asiática Geométrica de Compra;
%Valora opciones asiáticas de tipo geométrico de acuerdo con
```

```

las fórmulas de valoración de Kemna y Vorst, Angus, cuando el
activo subyacente es una tasa de cambio y por tanto la tasa
de dividendo se reemplaza por rf;
%-----;
function AsiaticaGC = AsiaticaGeoC(S0,K,rl,rf,sigma,T)
d1=(log(S0/K)+0.5*(rl-rf+0.5*((sigma^2)/6))*T)/(sigma*sqrt(T/3));
d2= d1-sigma*sqrt(T/3);
AsiaticaGC=exp(-rl*T)*(exp(0.5*T*(rl-rf-(sigma/6))))...
...*S0*normcdf(d1)-K*normcdf(d2));
%-----;
% Opción Asiática Geométrica de Venta;
%-----;
function AsiaticaGP = AsiaticaGeoP(S0,K,rl,rf,sigma,T)
d1=(log(S0/K)+0.5*(rl-rf+0.5*((sigma^2)/6))*T)/(sigma*sqrt(T/3));
d2= d1-sigma*sqrt(T/3);
AsiaticaGP=exp(-rl*T)*(K*normcdf(-d2)-...
...exp(0.5*T*(rl-rf-(sigma/6)))*S0*normcdf(-d1));

```

3. Valoración de opciones asiáticas de compra de tipo geométrico utilizando el método de Montecarlo *crudo* y el método de reducción de varianza utilizando como variable de control el precio de una opción asiática de tipo geométrico.

```

%-----;
%Valoración de opciones asiáticas de compra de tipo aritmético;
%-----;
function...
...[PA_MC,IntervMCArit,MCStd_Arit,PA_MCRV,IntervMCRV,MCRVStd]=
AsianMCRV_call(S0,K,sigma,rf,rl,T,npasos,nsims)
dt = T/npasos;%T está en años;
yield=rf;
R=exp(-rl*T);
MC_Arit=zeros(1,nsims);
MC_Geom=zeros(1,nsims);
for j=1:nsims
    nudt = (rl- yield - 0.5*sigma^2)*dt;
    sidt = sigma*sqrt(dt);
    Z=nudt+sidt*randn(1,npasos);
    S=cumsum([log(S0),Z],2);
    Media_arit=mean(exp(S));
    Media_Geom=exp(mean(S));
    V_call_Arit=max([Media_arit-K;zeros(1)]);

```

```

        V_call_Geom=max([Media_Geom-K;zeros(1)]);
        MC_Arit(1,j)=V_call_Arit*R;
        MC_Geom(1,j)=V_call_Geom*R;
    end
    MCmean_Arit=mean(MC_Arit);%Valor estimado de la opción por MC crudo;
    MCStd_Arit=std(MC_Arit)/sqrt(nsim);%error estándar de MC crudo;

    alpha=0.95;
    zi=norminv(alpha);
    LimInf_MCArit=MCmean_Arit-zi*MCStd_Arit/2;%limite inferior MC crudo;
    LimSup_MCArit=MCmean_Arit+zi*MCStd_Arit/2;%Límite superior MC crudo;

    %-----;
    %utilización del método de reducción de varianza;
    %-----;
    CallAG = AsiaticaGeoC(S0,K,rl,rf,sigma,T);%precio de la opción asiática;
    %geométrica por la fórmula de BS modificada;
    Mat_varcov=cov(MC_Arit,MC_Geom);%matriz de var-cov PA y PG;
    beta=Mat_varcov(1,2)/Mat_varcov(1,1);%beta* que minimiza la var;

    MCRV_Arit=MC_Arit-beta*(MC_Geom-CallAG);%estimador de MC con RedVar;
    MCRVmean=mean(MCRV_Arit);%estimador para la opción asiática aritmética;
    MCRVStd=std(MCRV_Arit)/sqrt(nsim);%error estándar del estimador;

    LimInf_MCRV=MCRVmean-zi*MCRVStd/2;%limite inferior MCRV;
    LimSup_MCRV=MCRVmean+zi*MCRVStd/2;%Límite superior MCRV;

    %-----;
    %Resultados para el precio de la opción asiática aritmética;
    %utilizando el método MC crudo o MC con RV;
    %-----;
    PA_MC=MCmean_Arit;
    IntervMCArit=[LimInf_MCArit,LimSup_MCArit];%Intervalo Confianza MC crudo;
    PA_MCRV=MCRVmean;
    IntervMCRV=[LimInf_MCRV,LimSup_MCRV];%Intervalo Confianza MCRV;
    %-----;
    %-----;
    %Valoración de opciones asiáticas de venta de tipo aritmético;
    %-----;
    function...

```



```

... [PA_MC, IntervMCArit, MCStd_Arit, PA_MCRV, IntervMCRV, MCRVStd]=
AsianMCRV_put(S0,K,sigma,rf,rl,T,npasos,nsims)
dt = T/npasos;%T está en años;
yield=rf;
R=exp(-rl*T);
MC_Arit=zeros(1,nsims);
MC_Geom=zeros(1,nsims);
for j=1:nsims
    nudt = (rl- yield - 0.5*sigma^2)*dt;
    sidt = sigma*sqrt(dt);
    Z=nudt+sidt*randn(1,npasos);
    S=cumsum([log(S0),Z],2);% suma acumulada de S0+Z por fila('2');
    Media_arit=mean(exp(S));
    Media_Geom=exp(mean(S));
    V_call_Arit=max([K-Media_arit;zeros(1)]);
    V_call_Geom=max([K-Media_Geom;zeros(1)]);
    MC_Arit(1,j)=V_call_Arit*R;
    MC_Geom(1,j)=V_call_Geom*R;
end
MCmean_Arit=mean(MC_Arit);%Valor estimado de la opción por MC crudo;
MCStd_Arit=std(MC_Arit)/sqrt(nsims);%error estándar de MC crudo;

alpha=0.95;
zi=norminv(alpha);
LimInf_MCArit=MCmean_Arit-zi*MCStd_Arit/2;%limite inferior MC crudo;
LimSup_MCArit=MCmean_Arit+zi*MCStd_Arit/2;%Límite superior MC crudo;

%-----;
%utilización del método de reducción de varianza;
%-----;
PutAG = AsiaticaGeoP(S0,K,rl,rf,sigma,T);%precio de la opción asiática;
%geométrica por la fórmula de BS modificada;
Mat_varcov=cov(MC_Arit,MC_Geom);%matriz de var-cov PA y PG;
beta=Mat_varcov(1,2)/Mat_varcov(1,1);%beta* que minimiza la var;

MCRV_Arit=MC_Arit-beta*(MC_Geom-PutAG);%estimador de MC con RedVar;
MCRVmean=mean(MCRV_Arit);%estimador para la opción asiática aritmética;
MCRVStd=std(MCRV_Arit)/sqrt(nsims);%error estándar del estimador;

LimInf_MCRV=MCRVmean-zi*MCRVStd/2;%limite inferior MCRV;

```

```

LimSup_MCRV=MCRVmean+zi*MCRVStd/2;%Límite superior MCRV;

%-----;
%Resultados para el precio de la opción asiática aritmética;
%utilizando el método MC crudo o MC con RV;
%-----;
PA_MC=MCmean_Arit;
IntervMCArit=[LimInf_MCArit,LimSup_MCArit];%Intervalo Confianza MC crudo;
PA_MCRV=MCRVmean;
IntervMCRV=[LimInf_MCRV,LimSup_MCRV];%Intervalo Confianza MCRV;

```

4. Valoración de opciones asiáticas con volatilidad estocástica de acuerdo con el modelo de Hull & White.

```

function [PA_MC_Arit IntervMCArit PA_MC_Geom IntervMCRV]=...
AsianMCRV_call_hULL(S0,K,V0,rf,rl,T,npasos,nsims,...
mu_sigma,sig_sigma)
dt = T/npasos;%T está en años;
R=exp(-rl*T);
SCaminos1 = zeros(nsim, 1+npasos);
SCaminos2 = zeros(nsim, 1+npasos);
V1 = zeros(nsim, 1+npasos);
V2 = zeros(nsim, 1+npasos);
S1 = zeros(nsim, 1+npasos);
S2 = zeros(nsim, 1+npasos);
MC_Arit=zeros(nsim,1);
MC_Geom=zeros(nsim,1);
V_call_Arit=zeros(nsim,1);
V_call_Geom=zeros(nsim,1);
Media_arit1=zeros(nsim,1);
Media_Geom1=zeros(nsim,1);
Media_arit2=zeros(nsim,1);
Media_Geom2=zeros(nsim,1);
SCaminos1(:,1) = log(S0);
V1(:,1)=V0;
SCaminos2(:,1) = log(S0);
V2(:,1)=V0;
S1(:,1)=S0;
S2(:,1)=S0;
for i = 1:nsim;
    for j=1:npasos;

```

---

```

z=randn;
w=randn;
SCaminos1(i,j+1)= SCaminos1(i,j)+ (rl-rf-(0.5*V1(i,j)))*dt+...
    (sqrt(V1(i,j)*dt)*z);
S1(i,j+1)=exp(SCaminos1(i,j+1));
SCaminos2(i,j+1)= SCaminos2(i,j)+ (rl-rf-(0.5*V2(i,j)))*dt+...
    (sqrt(V2(i,j)*dt))*(-z);
S2(i,j+1)=exp(SCaminos2(i,j+1));
V1(i,j+1)=V1(i,j)+(mu_sigma-0.5*sig_sigma)*dt+...
    (sqrt(sig_sigma*dt)*w);
V2(i,j+1)=V1(i,j)+(mu_sigma-0.5*sig_sigma)*dt+...
    (sqrt(sig_sigma*dt))*(-w));
if V1(i,j+1)<0
    V1(i,j+1)=(-V1(i,j+1));
else
    V1(i,j+1)=V1(i,j+1);
end

if V2(i,j+1)<0
    V2(i,j+1)=(-V2(i,j+1));
else
    V2(i,j+1)=V2(i,j+1);
end
end

Media_arit1(i,1)=mean(S1(i,:));
Media_Geom1(i,1)=geomean(S1(i,:));
Media_arit2(i,1)=mean(S2(i,:));
Media_Geom2(i,1)=geomean(S2(i,:));
V_call_Arit(i,1)=...
max([(0.5*(Media_arit1(i,1)+Media_arit2(i,1)))-K;zeros(1)]);
V_call_Geom(i,1)=...
max([(0.5*(Media_Geom1(i,1)+Media_Geom2(i,1)))-K;zeros(1)]);
MC_Arit(i,1)=V_call_Arit(i,1)*R;
MC_Geom(i,1)=V_call_Geom(i,1)*R;
end
AGest=(mean(Media_Geom2)+mean(Media_Geom1))/2;
AAest=(mean(Media_arit2)+mean(Media_arit1))/2;
MCmean_Arit=mean(MC_Arit);
MCStd_Arit=std(MC_Arit)/sqrt(nsims);

```

```

alpha=0.95;
zi=norminv(alpha);
LimInf_MCArit=MCmean_Arit-zi*MCStd_Arit/2;
LimSup_MCArit=MCmean_Arit+zi*MCStd_Arit/2;

MCmean_Geom=mean(MC_Geom);
MCStd_Geom=std(MC_Geom)/sqrt(nsims);
LimInf_Geom=MCmean_Geom-zi*MCStd_Geom/2;
LimSup_Geom=MCmean_Geom+zi*MCStd_Geom/2;

PA_MC_Arit=MCmean_Arit;
IntervMCArit=[LimInf_MCArit,LimSup_MCArit,MCStd_Arit];
PA_MC_Geom=MCmean_Geom;
IntervMCRV=[LimInf_Geom,LimSup_Geom,MCStd_Geom];

```

5. Valoración de opciones asiáticas con volatilidad estocástica de acuerdo con el modelo de Heston.

```

function [PA_MC_Arit IntervMCArit PA_MC_Geom IntervMCRV]=...
AsianMCRV_call_heston_aritm(S0,K,V0,rf,rl,T,npasos,nsims,...
kappa,theta,eta,rho)
dt = T/npasos;%T está en años;
R=exp(-rl*T);
SCaminos1 = zeros(nsims, 1+npasos);
SCaminos2 = zeros(nsims, 1+npasos);
V1 = zeros(nsims, 1+npasos);
V2 = zeros(nsims, 1+npasos);
S1 = zeros(nsims, 1+npasos);
S2 = zeros(nsims, 1+npasos);
MC_Arit=zeros(nsims,1);
MC_Geom=zeros(nsims,1);
V_call_Arit=zeros(nsims,1);
V_call_Geom=zeros(nsims,1);
Media_arit1=zeros(nsims,1);
Media_Geom1=zeros(nsims,1);
Media_arit2=zeros(nsims,1);
Media_Geom2=zeros(nsims,1);
SCaminos1(:,1) = log(S0);
V1(:,1)=V0;
SCaminos2(:,1) = log(S0);
V2(:,1)=V0;

```

---

```

S1(:,1)=S0;
S2(:,1)=S0;
for i = 1:nsims;
    for j=1:npasos;
        z=randn;
        w=randn;
        SCaminos1(i,j+1)= SCaminos1(i,j)+ (r1-rf-(0.5*V1(i,j)))*dt+...
            (sqrt(V1(i,j)*dt)*z);
        S1(i,j+1)=exp(SCaminos1(i,j+1));
        SCaminos2(i,j+1)= SCaminos2(i,j)+ (r1-rf-(0.5*V2(i,j)))*dt+...
            (sqrt(V2(i,j)*dt))*(-z);
        S2(i,j+1)=exp(SCaminos2(i,j+1));
        V1(i,j+1)=V1(i,j)+(kappa*(theta-V1(i,j)))*dt+...
            eta*(sqrt(V1(i,j)*dt))*(rho*z+(sqrt(1-((rho)^2)))*w);
        V2(i,j+1)=V2(i,j)+(kappa*(theta-V2(i,j)))*dt+...
            eta*(sqrt(V2(i,j)*dt))*(rho*(-z)+(sqrt(1-((rho)^2)))*(-w));
        if V1(i,j+1)<0
            V1(i,j+1)=(-V1(i,j+1));
        else
            V1(i,j+1)=V1(i,j+1);
        end

        if V2(i,j+1)<0
            V2(i,j+1)=(-V2(i,j+1));
        else
            V2(i,j+1)=V2(i,j+1);
        end
    end

    Media_arit1(i,1)=mean(S1(i,:));
    Media_Geom1(i,1)=geomean(S1(i,:));
    Media_arit2(i,1)=mean(S2(i,:));
    Media_Geom2(i,1)=geomean(S2(i,:));
    V_call_Arit(i,1)=...
        max([(0.5*(Media_arit1(i,1)+Media_arit2(i,1)))-K;zeros(1)]);
    V_call_Geom(i,1)=...
        max([(0.5*(Media_Geom1(i,1)+Media_Geom2(i,1)))-K;zeros(1)]);
    MC_Arit(i,1)=V_call_Arit(i,1)*R;
    MC_Geom(i,1)=V_call_Geom(i,1)*R;
end

```

```
AGest=(mean(Media_Geom2)+mean(Media_Geom1))/2;
AAest=(mean(Media_arit2)+mean(Media_arit1))/2;
MCmean_Arit=mean(MC_Arit);
MCStd_Arit=std(MC_Arit)/sqrt(nsims);
alpha=0.95;
zi=norminv(alpha);
LimInf_MCArit=MCmean_Arit-zi*MCStd_Arit/2;
LimSup_MCArit=MCmean_Arit+zi*MCStd_Arit/2;

MCmean_Geom=mean(MC_Geom);
MCStd_Geom=std(MC_Geom)/sqrt(nsims);
LimInf_Geom=MCmean_Geom-zi*MCStd_Geom/2;
LimSup_Geom=MCmean_Geom+zi*MCStd_Geom/2;

PA_MC_Arit=MCmean_Arit;
IntervMCArit=[LimInf_MCArit,LimSup_MCArit,MCStd_Arit];
PA_MC_Geom=MCmean_Geom;
IntervMCRV=[LimInf_Geom,LimSup_Geom,MCStd_Geom];
```

---

## Bibliografía

---

- [1] Bénédicte Alziary, Jean-Paul Décamps, and Pierre-Francois Koehl. A p.d.e approach to asian options: analytical and numerical evidence. *Journal of Banking and Finance*, 21:613–640, 1997.
- [2] John Angus. A note on pricing asian derivatives with continuous geometric averaging. *The Journal of Futures Markets*, Vol. 19(No. 7):845–858, 1999.
- [3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3 série(Tome 17):21 – 86, 1900.
- [4] E. Beckenbach and R. Bellman. *Inequalities*. Springer, 1971.
- [5] Hendrik Bessembinder, Jay Coughenour, Paul J. Seguin, and Margaret Monroe. Mean reversion in equilibrium asset prices: Evidence from the futures term structure. *The Journal of Finance*, 50(1):361–375, Mar 1995.
- [6] Fisher Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81(3):637 – 654, May – Jun 1973.
- [7] Liliana Blanco and Myriam Muñoz. *Notas de Clase Análisis Estocástico*. Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [8] Phelim Boyle. Options: A montecarlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4:323–338, 1977.
- [9] Phelim Boyle. New life forms on the option landscape. *Journal of Financial Engineering*, 2(3):217 – 252, 1993.
- [10] Phelim Boyle and Feidhlim Boyle. *Derivatives: The tools that changed finance*. Risk Books, 2001.
- [11] Phelim Boyle, Mark Broadie, and Paul Glasserman. Monte carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1267–1321, 1997.
- [12] P. Bratley, B. Fox, and L. Schrage. *A Guide to Simulation*. Springer-Verlag, 1987.

- 
- [13] Z. Brzezniak and T. Zastawniak. *Basic Stochastic Processes*. Springer, second edition, 1999.
  - [14] John Cox and Chi-Fu Huang. Option pricing theory and its applications. *Frontiers of Financial Theory*, 1987.
  - [15] John Cox and Stephen Ross. A survey of some new results in financial options pricing theory. *Journal of Finance*, 31:382–402, 1976.
  - [16] José Luis Crespo Espert. Estimación de los parámetros del modelo de heston. una aplicación al Índice ibex 35. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA.*, 11:197–214, 2010.
  - [17] Michael Curran. Valuing asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price. *Management Science*, 40(12):1705 – 1711, 1994.
  - [18] Jeff Dewynne and Paul Wilmott. Partial to the exotic. *Risk*, 6:40 – 44, 1993.
  - [19] Jeff Dewynne and Paul Wilmott. Asian options as a linear complementary problems: Analysis and finite difference solutions. *Advances in Futures and Options Research*, 8:145 – 173, 1995.
  - [20] Albert Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.
  - [21] Eugène Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2):383 – 417, 1970.
  - [22] Lorella Fatone, Francesca Mariani, Maria Cristina Recchioni, and Francesco Zirilli. Some explicit formulae for the hull and white stochastic volatility model. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, 2:14–33, 2013.
  - [23] Paolo Foschi, Stefano Pagliarani, and Andrea Pascucci. Approximations for asian options in local volatility models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 237:442–459, 2013.
  - [24] Mark Garman and Steven Kohlhagen. Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 2:231–237, Dec 1983.
  - [25] Andrés Gómez. Estimación de una superficie de volatilidades para las opciones sobre la tasa de cambio usd/cop. *Revista del mercado de valores*, (Número 1), Diciembre 2010.
  - [26] Carlos Grajales. Modelación estocástica de la tasa de cambio peso colombiano/ u.s dólar. *Universidad EAFIT Medellín - Colombia*, 2006.
  - [27] A. Gulisashvili. *Analytically Tractable Stochastic Stock Price Models*. Springer-Verlag, 2012.



- 
- [28] J.M Hammersley and D.C Handscomb. *Monte Carlo Methods*. London: Methuen & CO LTDA, 1964.
- [29] J. M. Harrison and D. M. Kreps. Martingales and arbitrage in multi-period securities markets. *Journal for Economic Theory*, 20(3):381–408, 1979.
- [30] J. M. Harrison and S. R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11:215–260, 1981.
- [31] Steven Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.
- [32] John Hull and Alan White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281–300, Jun 1987.
- [33] William C. Hunter and David W. Stowe. Path-dependent options: valuation and applications. *Economic Review, Federal Reserve Bank of Atlanta*, Jul:30 – 43, 1992.
- [34] The Option Institute. *Options*. McGraw Hill, 1999.
- [35] Philippe Jorion and Richard Sweeney. Mean reversion in real exchange rates:evidence and implications for forecasting. *Journal of International Money and Finance*, 15(4):535–550, 1996.
- [36] Angelien Kemna and Ton Vorst. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking and Finance*, 14:113–129, 1990.
- [37] Peter Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer - Verlag, second edition edition, 1992.
- [38] Ralf Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics*. American Mathematical society, 2001.
- [39] S.S Lavenberg and P.D Welch. A perspective on the use of control variables to increase the efficiency of monte carlo simulations. *Management Science*, 27(3):322–335, Mar 1982.
- [40] Averill Law and W. David Kelton. *Simulation Modeling and Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [41] Pedro Felipe Lega, Andrés Murcia, Diego Vásquez, and Tatiana Venegas. Volatilidad de la tasa de cambio nominal en colombia y su relación con algunas variables. *Borradores de Economía Banco de la República*, (473), 2007.
- [42] Carlos León. Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos. *Borradores de Economía Banco de la República*, (570), 2009.

- 
- [43] Edmond Levy. Pricing european average rate currency options. *Journal of International Money and Finance*, 11:474 – 491, 1992.
  - [44] Angelo Melino and Stuart M. Turnbull. Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics*, 45(1-2):239–265, Jul-Ago 1990.
  - [45] Robert Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation)*, 4:141 – 183, 1973.
  - [46] Thomas Mikosh. *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific, 1999.
  - [47] Moshe Milevsky and Steven Posnen. Asian options, the sum of lognormals and the reciprocal gamma distribution. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 33(3), 1998.
  - [48] Ernesto Mordecki. *Modelos Matemáticos en Finanzas: Valuación de Opciones*. Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, Montevideo, Uruguay, 2003.
  - [49] Ernesto Mordecki. Modelos matemáticos en finanzas. *Universidad de la República, Montevideo, Uruguay*, 2010.
  - [50] W. Mudzimbabwe, K.C. Patidar, and P.J. Witbooi. A reliable numerical method to price arithmetic asian options. *Applied Mathematics and Computation*, 218:10.934–10.942, 2012.
  - [51] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer - Verlag, second edition edition, 2005.
  - [52] David Nualart. Bsde’s and feynman-kac formula for lèvy processes with applications in finance. *Universidad de Barcelona*, 2001.
  - [53] David Nualart. *Notas de clase sobre cálculo estocástico*. Universidad de Barcelona, 2002.
  - [54] Andrea Pascucci. *PDE and Martingale methods in option pricing*. Springer, 2011.
  - [55] Philip Protter. *Stochastic Integration and differential Equations*. Springer-Verlag, 2 edition, 1992.
  - [56] Leonard C.G Rogers and Z. Shi. The value of an asian option. *Journal of Applied Probability*, 32:1077 – 1088, 1995.
  - [57] Paul Samuelson. Rational theory of warrant prices. *Industrial Management Review*, 6(2):13–39, Spring 1965.
  - [58] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004.
  - [59] Steven E. Shreve and I. Karatzas. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York, 1991.

- 
- [60] Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2001.
  - [61] Stuart Turnbull and Lee Wakeman. A quick algorithm for pricing european average options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3):377 – 389, 1991.
  - [62] Uwe Wystup. *FX Options and Structured Products*. Wiley, 2006.
  - [63] Xiao Xiao. Advanced monte carlo techniques: An approach for foreign exchange derivative pricing. *University of Manchester, School of Mathematics*, 2007.